ОСНОВАНИЯ ФИЗИКИ

УДК 531.1

Николенко А.Д.

О ПОНЯТИИ ДВИЖЕНИЯ И НЕИЗБЕЖНОСТИ ЕГО КВАНТОВАНИЯ

(Окончание. Начало в № 1–2/19)

Институт исследования природы времени, Международное общество по изучению времени (ISST)
E-mail: antares2090niko@gmail.com

Рассмотрены проблемы, возникающие при построении времянезависимого определения механического движения. Отмечена ключевая роль понятия бесконечности в понимании механического (других разновидностей) движения. Показано, что только естественно возникающее квантование движения приводит к устранению парадоксов движения (апории Зенона и т.д.).

Ключевые слова: понятие движения, теория множеств, парадоксы движения, апории Зенона, теория квантования, теория времени

Часть 3. Основная теорема

Переход к определению движения через мощности множеств открывает бо̀льшие возможности по изучению проходимости множеств по сравнению с определением движения 2.4.

Представление о проходимости множеств по определению 2.5. может использоваться и при новом представлении о движении. Понятие интервала нарастания может быть заменено на более общее, главную роль в котором играет сечение множества на два подмножества, причем мощности этих подмножеств при движении меняются: например стаю крокодилов можно разбить на два подмножества: сытые крокодилы | голодные крокодилы. Насыщение голодных крокодилов вызывает на этом множестве движение. При этом мы обходимся без требования упорядоченности этих множеств.

Рассмотрим теперь проходимость различных видов множеств, используя новое понимание движения.

Лемма 3.1. Любое конечное множество является проходимым.

Доказательство. Пусть дано конечное непустое множество M. Выберем из него с помощью $P(x)$ какой-либо элемент, обозначим его как x_0, сопоставим с числом 0. Образуем подмножество S и разместим в нем элемент x_0. Затем выберем из множества $M\backslash\{x_0\}$ новый элемент, обозначим его как x_1 и сопоставим его числу 1. Отправим его в подмножество S. Будем поступать так же, пока не окажется, что $M\backslash\{x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n\} = \varnothing$. Рассматривая это множество как F, получим $F = \varnothing$. А это означает выполнение критерия проходимости по определению 2.5., что и доказывает лемму.

Сразу видно различие между процессом движения по классической схеме и движением по новой схеме. Движение в данном случае совершается по схеме пересчета.

В общем случае элементы для переброса в подмножество S могут выбираться не обязательно по принципу соседства, как раньше, т.е. могут выбираться иным способом. Но для упорядоченных подмножеств такой переброс должен осуществляться в соответствии с естественной упорядоченностью множества.

На самом множестве M мы не требуем упорядоченности, однако в процессе движения элементы, поочередно попадающие в подмножество S линейно упорядочиваются. Чтобы сохранить аналогию с текущим значением как дедкиндовым сечением множества M, подмножество S можно рассматривать как дополнение до M: $S = M\backslash F$. А новое подмножество, формирующееся из переброшенных элементов $\{x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n\}$, назовем множеством След и обозначим литерой T. Это множество формируется как результат работы предиката $P(x)$. При непрерывном движении подмножество След совпадает с подмножеством S (на упорядоченном множестве представляющим траекторию движения). Например, при движении на множестве натуральных чисел $S = T$. Для непроходимых множеств $T = \varnothing$. Однако могут существовать ситуации, при которых множества S (траектория) и T (След) совпадать не будут — мы их рассмотрим позже.

Рассмотрим проходимость упорядоченных бесконечных множеств.

Теорема 3.2. Бесконечное множество натуральных чисел **N** всюду проходимо.

Доказательство. Примем во внимание, что проходимость (точнее всюду проходимость) определяется через проходимость любого произвольно взятого замкнутого подмножества (замкнутого интервала). Поскольку на **N** любой замкнутый интервал представляет собой конечное множество, то по теореме 3.1. он будет проходимым. В силу произвольности выбора интервала любой интервал множества **N** является проходимым, и таким образом это множество проходимо всюду.

Множество **N** представляет собой пример проходимости бесконечного счетного множества. Движение на нем может быть организовано по схеме пересчета. Естественным образом возникает вопрос — является ли любое счетное множество проходимым? Ответ на него не так очевиден и будет рассмотрен ниже.

Перейдем к ключевому вопросу данной работы — будут ли проходимы несчетные множества, в частности множества вещественных чисел **R**, представленных числовой прямой?

Теорема 3.3. (Основная теорема). Множество вещественных чисел **R** (числовая прямая) непроходимо.

Подчеркнем, что здесь и далее мы имеем в виду континуальную непроходимость.

Доказательство. Выделим на этом множестве произвольный интервал нарастания I и произвольно зададим текущее значение $x\uparrow$ таким образом, чтобы его значение не совпадало с граничными точками интервала. Соответственно определяются непустые подмножества S и F.

Примем во внимание известный результат теории множеств:

Теорема 3.4. Всякий из интервалов вида $[a,b],[a,b),(a,b],(a,b)$ на числовой прямой имеет мощность континуума $\boldsymbol{c}$.

С доказательством теоремы теории множеств, утверждающей этот факт, можно ознакомиться, например, в [12]. Для нас также важно следствие из этой теоремы:

Следствие 3.4а. Мощности множеств вида $[a,b],[a,b),(a,b],(a,b)$ не зависят от длины соответствующих интервалов.

Механизм формирования такого удивительного свойства бесконечных множеств мы рассмотрим ниже.

На основании теоремы 3.4. и следствия из нее можно утверждать, что мощности подмножеств S и F не зависят от положения текущего значения $x\uparrow$. Из этой же теоремы вытекает, что мощность любого ограниченного подмножества вещественных чисел S равна мощности континуума $\boldsymbol{c}$ (за исключением стартового положения: $S = \{a_s\}$). То же самое можно сказать и о подмножестве F: $|F| = \boldsymbol{c}$ (за исключением финишного положения $F = \varnothing$). Отсюда следует, что если мы попытаемся сместить границу между множествами S и F, то это не может изменить их мощностей! Этот факт формирует тождество:

$$|S| \equiv |F| \equiv \boldsymbol{c}. \qquad (3.1.)$$

Таким образом, вследствие выполнения тождества (3.1) соотношения 2.10 нарушаются и движение на множестве вещественных чисел согласно определению 2.10 оказывается невозможным, конфигурация $|F| = 0$ становится недостижимой, а критерии проходимости не могут быть выполнены. В силу этого интервал I является непроходимым.

Для непроходимости всего линейно упорядоченного множества, как мы говорили выше, достаточно хотя бы одного непроходимого интервала. Кроме того, учитывая, что интервал I мы выбрали произвольным образом, можно говорить о непроходимости всего множества **R** на любом своем интервале и в целом. Теорема доказана.

Заметим, что выполнение тождества $|S| \equiv |F|$ является удобным признаком непроходимости множества.

Теорема 3.3. основана на ниспровержении VIII аксиомы Евклида усилиями создателя теории множеств Георга Кантора, который обнаружил равномощность интервала числовой прямой и всего множества вещественных чисел, содержащего этот интервал.

Из теоремы 3.3. следует, что на числовой прямой **R** континуальное движение невозможно и поэтому множество $T = \varnothing$.

Отметим также следующий момент.

Теорема 3.5. Множество вещественных чисел **R** (числовая прямая) содержит бесконечное количество недостижимых точек.

Доказательство. Выберем произвольным образом точку A на числовой прямой. Отступим от нее влево на некоторый интервал и отметим точку B. Попытаемся построить интервал нарастания, начальной точкой которого будет точка B, а конечной — A. В силу теоремы 3.3. этот интервал будет непроходимым, и, следовательно, по определению 2.7. точка A будет недостижимой. Поскольку точка A выбиралась произвольным образом, то полученный результат может быть применен к любой точке множества. Теорема доказана.

Понятие недостижимых точек удобно для описания препятствий движению.

Теперь немного о начальной фазе движения — сдвиге. Сдвиг заключается в том, что текущее значение $x\uparrow$ отделяется от стартовой позиции a_s. Считаем очевидным, что между исходным положением $x\uparrow = a_s$ и началом движения, которое характеризуется положением $x\uparrow \neq a_s$, промежуточные положения невозможны. Мы либо стоим, либо движемся — третьего не дано. Событие отделения может быть задан аксиомой отделимости. Воспользуемся аксиомой отделимости по Колмогорову, так как иные формулировки (например, аксиома отделимости по Хаусдорфу) ничего нового для нас не дают.

Аксиома отделимости по Колмогорову (T_0) заключается в том, что если одна точка (в нашем случае a_s) оказалась отделенной от другой точки (в нашем случае — текущее значение $x\uparrow$), то по крайней мере одна из этих точек должна иметь окрестность, не содержащую другую точку см. например [13]. Но данная окрестность, по сути, есть интервал, лежащий между точками и который на числовой прямой в соответствии с теоремой 3.4. имеет фиксированную мощность $\boldsymbol{c}$, не зависящую от длины этого интервала.

Отсюда следует, что при отделении текущего положения от исходной позиции мощность подмножества S скачкообразно возрастает от $|S| = 1$ до $|S| = \boldsymbol{c}$ и фиксируется на этом значении (см. рис.8).

Если бы это было не так, то мы должны были бы иметь некое гипотетическое третье положение между $x\uparrow = a_s$ и $x\uparrow \neq a_s$. А это невозможно.

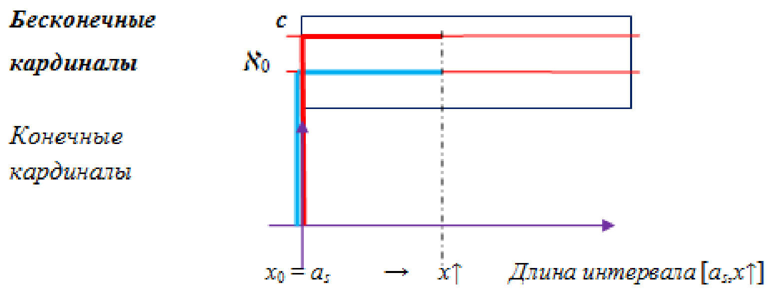

Рис. 8. Диаграмма «Мера — мощность». Начало движения приводит к скачкообразному возрастанию мощности до уровня соответствующего бесконечного кардинала и далее сохраняется на этом уровне, для множества рациональных чисел Q мощность равна кардинальному числу $\aleph_0$, — для множества вещественных чисел R мощность равна кардинальному числу c — мощности континуума.

В интуитивном смысле вышесказанное означает, что при любой попытке сдвинуться с места на вещественной прямой, мы проваливаемся в бесконечность, которая блокирует любое движение на этом множестве. В эти провалы и уходит движение, делая множество непроходимым.

Корень проблемы в том, что на бесконечности арифметика для мощности отличается от обычной арифметики интервалов. Поэтому-то и возникают запреты на движение.

Полученные результаты подтверждают правоту О. Коши и его коллег в том, что выражения вида «независимая переменная x на числовой прямой пробегает все свои значения от x_0 до x_n» являются некорректными, поскольку противоречат теореме 3.3.

Движение на множестве вещественных чисел **R** эквивалентно движению по любой пространственной кривой. Так как теорема 3.3. его запрещает на числовой прямой, то и любое пространственное движение оказывается невозможным.

Возникает проблема континуальной непроходимости любого вида точечных пространств.

Выходит, что если окружающее нас пространство представить как метрическое точечное пространство, то на вопрос, можно ли переместиться из точки А в точку Б, даже если они находятся сколь угодно близко друг к другу, приходится отвечать отрицательно. А это может означать только то, что окружающее нас пространство всюду непроходимо и **абсолютно твердо!** Это же вывод следует из раздела 2.4.

На каждом вещественном интервале или на каждом замкнутом объеме пространства действует своего рода закон сохранения мощности: мощность точечного множества, заключенного в них, независимо от их размеров сохраняется неизменной и равна мощности континуума. Если мы будем стягивать эти интервалы и объемы в точку, мощность не изменяется и соответственно плотность (или твердость по нашей терминологии) будет оставаться бесконечно большой. В результате все наше пространство оказывается сингулярным, поскольку в каждой его точке твердость (плотность) равна бесконечности.

Итак, опираясь на теоретико-множественный подход и новое определение движения, мы пришли к тому-же выводу, что и Зенон Элейский в своих апориях — движение в нашем мире невозможно. Особо подчеркнем, что мы это доказали иным способом, и не прибегая к понятию времени!

Часть 4. Решение проблемы движения

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами Солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

А.С. Пушкин. «Движение», 1825

4.1. С какой стороны искать решение парадоксов движения?

Итак, мы показали, что движения не существует. Это полностью соответствует выводам, к которым пришел Зенон, Парменид и их последователи 2,5 тыс. лет назад.

Но ведь движение в природе все-таки присутствует! Это бесспорный наблюдательный факт, противоречащий нашим выводам. Природа каким-то образом умудрилась разрешить этот парадокс.

Где найти разгадку этой дилеммы?

Идея ответа заключается в следующем.

Иллюстративный пример. Возьмем кокосовый орех. Он сам по себе совершенно несъедобный. Как и движение в нашем представлении оказывается невозможным. Однако в глубине кокоса присутствует съедобная компонента, до которой только нужно добраться, чтобы получить вполне съедобное содержимое. В итоге орех оказывается все-таки съедобным, хотя для этого приходится пожертвовать его частью.

Попробуем найти «съедобную компоненту» — особенность движения, которая позволяет его разблокировать.

Надежду на это дает нам известная теорема теории множеств — см. например [13]:

Теорема 4.1. Всякое бесконечное множество M содержит счетное подмножество A.

К сожалению, эта теорема лишь указывает путь, но не решает проблему, так как счетность подмножества $A \subset M$ еще не гарантирует его проходимость.

Как мы показали ранее, при любой попытке сдвинуться с места на числовой прямой между предшествующим и текущим положением субъекта движения скачкообразно формируется интервал, содержащий бесконечность. И эта бесконечность лишает вещественную прямую проходимости, обездвиживает ее.

Для того, чтобы разобраться, как возникают проблемы с проходимостью, необходимо исследовать природу бесконечностей, проявляющихся на множествах и влияющих на саму возможность движения.

4.2. Бесконечности и их роль в окружающем нас мире

В настоящее время господствует иллюзия, что наш мир — это мир конечных величин. На самом деле это не так: наш мир, это в первую очередь мир бесконечностей. И проблемы с движением, проявляющиеся в апориях Зенона, как раз связаны с вторжением в нашу жизнь таких бесконечностей.

Когда мы говорим о бесконечности, то часто представляется нечто неощутимое, незавершенное, сугубо абстрактное, то, что невозможно увидеть, ощутить, потрогать. Т.е. то, что в нашей реальной жизни не существует. Плод игры разума, не более того.

Между тем это неверно: бесконечность можно увидеть целиком, потрогать руками и даже всю целиком накрыть ладонью!

Есть серьезные основания полагать, что бесконечности играют ключевую роль в формировании протяженности в окружающем нас пространстве. А наличие протяженности — необходимый элемент формирования движения. Иначе в чем же будет осуществляться движение?

Как же формируется протяженность? Протяженность выражается в виде интервала. Обратим внимание на структуру замкнутого интервала (отрезка): $[a,(a,b),b]$ на множестве вещественных чисел. В нем обязательно присутствует плотное подмножество (a,b), содержащее бесконечное число элементов. На интервале эта бесконечность оказывается ограниченной элементами a и b. Таким образом, вопреки обыденным представлениям о безграничной бесконечности, они (по крайней мере определенная их разновидность) могут быть целиком размещены в ограниченной области.

Для того, чтобы рассуждать дальше, нужно выделить *два вида бесконечности* на множествах.

Определение 4.1. Под α-бесконечностью множества, или «бесконечностью вширь» будем понимать бесконечность множества в силу его неограниченности (отсутствие хотя бы одной грани). $\forall x(x \in M\text{: } \inf M = \varnothing \wedge \sup M = \varnothing)$. В этом случае: $-\infty < x < +\infty$. Обозначим этот вид бесконечных множеств как α-∞.

К этому виду будем относить и бесконечности, ограниченные только с одной стороны: $\forall x\ (x \in M\text{: } \inf M = a,\ a < x < +\infty)$ и $\forall x\ (x \in M\text{: } \sup M = b,\ -\infty < x < b)$.

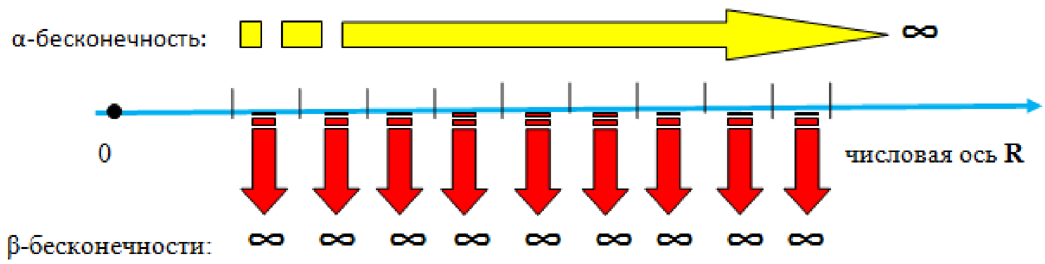

Рис. 9. Условное изображение α-бесконечности и β-бесконечностей на числовой оси.

Определение 4.2. Под β-бесконечностью множества, или «бесконечностью вглубь» будем понимать бесконечность на ограниченных множествах, в частности отрезках. $\forall x\ (x \in M\text{: } \inf M \neq \varnothing \wedge \sup M \neq \varnothing)$. При этом если $\inf M = a$, $\sup M = b$, то $a \leq x \leq b$. Обозначим этот вид бесконечных множеств как β-∞.

Из определения следует, что β-бесконечность присутствует только на тех ограниченных множествах, на которых действует аксиома плотности, т.е. только на плотных множествах.

Основным строительным материалом для точечных пространств являются одноэлементные множества $A_i = \{a_i\}$. Для числовой прямой мера точки a (как одноэлементного множества) согласно (2.4) равна: $\mu(a) = |a - a| = 0$. Однако как из нульмерных объектов создать ненулевую пространственную протяженность? Ведь без нее мы пространство не сформируем. На это счет можно высказать следующее суждение.

Допустим, мы собираем в совокупность конечное число точек с целью что-либо построить. Появится ли в результате пространственная протяженность? Для конечных множеств действует принцип конечной аддитивности:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{1}^{n} \mu(A_i),$$

который для нульмерных объектов (в нашем случае точек) означает, что объединение конечного числа нулей в результате все равно даст нульмерный объект:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 0_1 + 0_2 + \ldots 0_n = 0.$$

Сколько нолей не складывай, все равно в итоге получим ноль.

Если взять бесконечное число точек (бесконечность в данном случае счетная, мощность соответствующего множества равна $\aleph_0$), то действует аналогичный принцип счетной аддитивности:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \qquad (4.1)$$

При $\mu A_i = 0$, имеем тот же результат:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0_1 + 0_2 + \ldots 0_n + \ldots = 0.$$

Отсюда следует, что сумма бесконечного числа точек-нулей все равно даст в итоге нуль, из которого нам все равно ничего не удастся построить.

Однако ситуация резко меняется, если взять и объединить несчетное количество точек, т.е. более мощное множество — мощности континуум ***c***. Принцип счетной аддитивности в этом случае уже не действует. Проверим, что происходит при этом на интервале вещественной прямой: $[a,b] = \{a,(a,b),b\}$. Подмножество (a,b) как раз и представляет результат объединения точек множества континуум, и это объединение уже не нульмерный объект. Таким образом, мы должны признать, что объединение бесконечного множества точек мощности континуум уже не аддитивно и его мера уже не равна нулю:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\beta-\infty} \Big|_a^b A_i) = |b — a|. \qquad (4.2)$$

Здесь множество $(\bigcup_{i=1}^{\beta-\infty} \Big|_a^b A_i) = M$, $\inf M = a$, $\sup M = b$, $a \neq b$. M — бесконечное точечное множество мощности континуум, сформировавшее линейную протяженность между несовпадающими точечными элементами a и b. Такая β-бесконечность как бы «склеивает» эти точки между собой, порождая тем самым ненулевую протяженность. Можно полагать, что это важнейшая роль β-бесконечности в конструкции Вселенной.

Получается, что любой отрезок прямой есть наглядный локализованный образ бесконечности, как это ни странно. Каждый протяженный объект нашего мира содержит в себе бесконечности. Удали бесконечности, и пространство со всем, что в нем содержится, рассыплется на отдельные точки.

Можно сказать, что и все объекты Вселенной «склеены» из бесконечностей. Заметим также, что движение может возникнуть только на сформированной протяженности. Выходит, и здесь без бесконечности не обойтись.

Полезно привести неформальный аналог работы β-бесконечности по формированию протяженности. В исходном состоянии бесконечность можно представить как расплавленный металл, не имеющий формы. Он сам по себе ничего скреплять не может. Но если мы зальем его в форму, то такой металл заполнит ее и, застывая, примет ее форму. При этом он намертво скрепляет между собой опущенные в него элементы. Так формируется и β-бесконечность мощности континуум, скрепляя между собой нульмерные элементы, не давая им снова слиться в нуль и приобретая таким образом пространственную протяженность — с мерой больше нуля. В этом смысл формулы (4.2).

Множество таких ненульмерных островков — дизъюнктных подмножеств по известной теореме теории множеств являются счетным множеством. И по формуле счетной аддитивности (4.1) теперь из них может формироваться любая протяженность.

Рассмотрим связь между α-бесконечностью и β-бесконечностью.

При условии истинности аксиомы выбора все существующие множества являются либо индуктивными (имеющие в точности n членов), либо рефлексивными, третьего не дано [27]. Напомним понятие рефлексивного множества.

Определение 4.3. Рефлексивным является множество, эквивалентное своему собственному подмножеству. Другими словами, множество M рефлексивно, если $M \sim P$, где $P \subset M$.

Иногда говорят, что множество M называется бесконечным по Дедекинду [21], если в нём существует такое собственное подмножество $P \subset M$, что $M| = |P|$.

Отсюда следует, что все рефлексивные множества бесконечны. Если множество нерефлексивно, то оно конечно (индуктивно).

Подчеркнем, что рефлексивные множества являются интересным примером нарушения VIII аксиомы Евклида («Целое больше части»).

Введем в качестве частного случая рефлексивного множества понятие множества M, рефлексивного в отрезок.

Определение 4.4. Под рефлексивным в отрезок множеством M будем понимать множество, эквивалентное своему собственному ограниченному подмножеству P (в частности отрезку), т.е. $P \subset M$, $P = [a,b]$, $a,b \in M$, $M \sim P$.

Заметим, что ограниченное множество P может быть любым видом ограниченного интервала: $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ в силу их эквивалентности. Соответственно конечные точки интервала могут быть элементами P, или не входить в него, оставаясь элементами множества M.

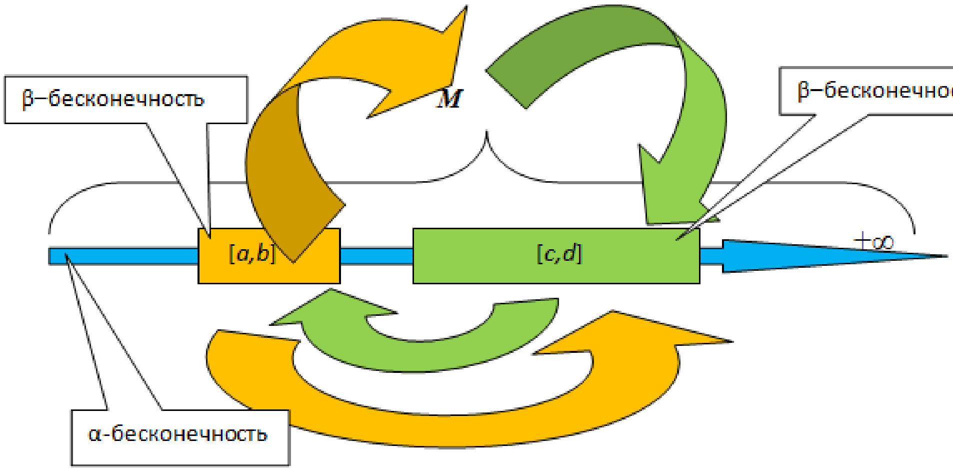

Рис. 10. Рефлексия в отрезок на бесконечном множестве (отношения эквивалентности).

Чтобы α- и β- бесконечности можно было связать в рефлексии, они должны иметь одинаковую мощность: $|M| = |P|$. Без этой эквивалентности ($M \sim P$) рефлексия «не срастается». Но бесконечность «вглубь», т.е на отрезке, порождается аксиомой плотности, и в силу этого она является неотъемлемой частью этой конструкции. Итак, без плотности множества рефлексия в отрезок невозможна.

Условно говоря, при наличии рефлексии безграничная «бесконечность вширь», охватывающая все множество, трансформируется в «бесконечность вглубь», как бы «упаковывается» в отрезки на этом же множестве с помощью аксиомы плотности. Иной способ упаковать бесконечность в отрезок, не прибегая к аксиоме плотности, нам не известен. При этом длина отрезка на работу аксиомы плотности не влияет (но присутствует в виде конечных точек).

Плотность множества порождает рефлексию, а рефлексия — эквивалентность мощности β-бесконечности, упакованной в отрезок, мощности α-бесконечности на всем множестве. Поскольку мощности каждой из упакованных в отрезки β-бесконечностей равны одной и той же мощности α-бесконечности множества M в целом, они на этом множестве будут тождественно равны и между собой в силу транзитивности отношения эквивалентности:

$$[a,b]^{\beta\text{-}\infty} \sim M^{\alpha\text{-}\infty} \sim [c,d]^{\beta\text{-}\infty} \to [a,b]^{\beta\text{-}\infty} \sim [c,d]^{\beta\text{-}\infty}. \qquad (4.3)$$

Здесь интервалы $[a,b]^{\beta\text{-}\infty} \subset M$, $[c,d]^{\beta\text{-}\infty} \subset M$, a,b,c,d — произвольно взятые элементы множества M. Таким образом рождается независимость мощности интервала рефлексивного в отрезок множества от его длины. Мощности всех интервалов становятся тождественно равными мощности самого множества M. А это обстоятельство «обездвиживает» все множество в силу выполнения тождества $|S| \equiv |F|$.

В соотношении (4.3) лежит корень проблем в апориях Зенона и источник противоречивости классического понимания движения: плотность, т.е. бесконечная делимость, играющая основную роль в апориях о движении, на плотных бесконечных множествах тесно связана с рефлексией в отрезок, которая убивает всякое движение.

Примечание: конечное «по длине» множество, например отрезок числовой оси, дает пример, когда роль α-бесконечности принимает на себя β-бесконечность. Такое множество также является рефлексивным в отрезок. При этом все выводы остаются в силе.

В итоге можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.2. Всякое рефлексивное в отрезок множество является непроходимым. Действительно, пусть рефлексивное в отрезок множество $M \supset A_1 = [a_1,b_1]$, $a_1,b_1 \in A_1$, и $M \supset A_2 = [a_2,b_2]$, $a_2,b_2 \in A_2$. Тогда из определения рефлексии в отрезок следует, что $|M| = |A_1|$, $|M| = |A_2|$, $\rightarrow \forall A_1 \forall A_2 (|A_1| = |A_2|)$, $\rightarrow |A_1| \equiv |A_2| \rightarrow |S| \equiv |F|$; $S,F \subset M$.

С другой стороны, любое непроходимое бесконечное множество является рефлексивным в отрезок. Действительно, множество является непроходимым, если выполняется тождество $|S| \equiv |F|$. Тождество мощностей подмножеств означает, что они выполняются для любых отрезков на M. Но такая ситуация возможна только тогда, когда все они (независимо от положения и размеров) равномощны одному и тому же множеству — самому множеству M. Таким образом, M — рефлексивное в отрезок множество.

Из этого следует удобный признак непроходимости — достаточно установить, является ли множество рефлексивным в отрезок. Если да, то оно непроходимо, если нет — оно конечно, и значит проходимо; или бесконечно, но на нем не выполняется тождество 3.1. и оно в силу этого всюду проходимо (пример — бесконечное множество натуральных чисел).

Стоит отметить, что α-бесконечное множество без аксиомы плотности (т.е. без связи с β-бесконечностью) рефлексивно в смысле эквивалентности своему α-бесконечному подмножеству и характеризует счетные множества мощности $\aleph_0$. Таково множество натуральных чисел **N**, и оно проходимо. На нем определяются соседние элементы (из-за отсутствия плотности), что позволяет организовать движение.

Множество рациональных чисел **Q** также имеет эту же мощность $\aleph_0$, но на нем выполняется аксиома плотности, порождающая рефлексию в отрезок, и оно в связи с этим непроходимо, хотя и счетно. Соседних элементов в естественной упорядоченности множества (в силу плотности) уже нет. Мы полагаем, что порядок движения должен соответствовать естественному порядку на множестве. Наличие соседних элементов в порядке пересчета нас не спасает, так как он не соответствует естественной упорядоченности множества. Нам естественнее понимать движение как переход от точки к точке в естественной упорядоченности, так как такое движение соответствует монотонному возрастанию текущего значения переменной. Факт нарастания самой переменной связан именно с естественной упорядоченностью по величине, а не по выбору системы нумерации элементов множества.

Вывод: упорядоченность по движению на множестве может формироваться на счетном множестве в том и только том случае, когда естественная упорядоченность множества совпадает с его счетной упорядоченностью.

Множество вещественных чисел **R** имеет более высокую мощность континуума ***c***, рефлексивно в отрезок и в силу этого непроходимо. Соседних элементов не имеет. Оно плотнее упаковано «вглубь», так как кардинальное число таких β-бесконечных множеств ***c*** больше кардинального числа счетных множеств $\aleph_0$, обладающих плотностью.

В итоге из вышесказанного можно сформулировать следующие условия проходимости множества.

Упорядоченное множество проходимо тогда и только тогда, когда оно не является рефлексивным в отрезок, что означает, что на нем в естественной упорядоченности *не выполняется аксиома плотности* (на нем определяются соседние элементы и в связи с этим оно не является бесконечно делимым), оно является *не более чем счетным (для проходимого множества его кардинальное число не может превышать* $\aleph_0$), и заданный на нем *естественный порядок соответствует порядку пересчета* (соседние элементы при пересчете остаются соседними и в естественной упорядоченности множества).

Невыполненение аксиомы плотности (в естественной упорядоченности) означает отсутствие на множестве β-бесконечностей. Следовательно, на нем уравнение (4.2), необходимое для формирования протяженности, не выполняется.

В результате мы сталкиваемся с *парадоксальной ситуацией*: для движения необходима протяженность, чтобы было в чем двигаться; для формирования протяженности не обойтись без β-бесконечности мощностью не менее континуума, а такая бесконечность, как выяснилось, сама по себе убийственна для движения. Возникает замкнутый круг.

Как организовать движение, не разрушая при этом необходимую для движения протяженность?

4.3. Как преодолеть непроходимость?

Теперь мы можем рассмотреть вопрос, каким же образом возможно преодолеть непроходимость множеств, особенно таких важных, как множество вещественных чисел, формирующих пространственную протяженность нашего мира.

Пусть дано непроходимое линейно упорядоченное множество M. В силу своей непроходимости континуальное движение на нем невозможно ($T = \varnothing$). Что нам мешает? Мешают β-бесконечности: при любой попытке движения мы «проваливаемся» в них, «увязаем» и движение блокируется.

Избавиться от них нельзя: β-бесконечности — это своего рода «клей», склеивающий нульмерные элементы — точки (точечные элементы бесконечных множеств) в пространственную протяженность, формируя целостность нашего мира. Следовательно, чтобы разблокировать движение, β-бесконčности надо как-то изолировать, не мешая им при этом выполнять свою функцию.

Вернувшись к упомянутой в начале раздела теореме 4.1., примем во внимание следующую теорему Кантора [27].

Теорема 4.3. (Кантор). Всякая совокупность отделенных интервалов (α ... β), самое большее совпадающих концами, которые определены на бесконечной прямой линии, необходимо является счетной совокупностью.

Разбиение любого, в том числе всюду плотного несчетного упорядоченного множества M на дизъюнктные (т.е. в совокупности составляющие все исходное множество) интервалы дает удивительный результат — число таких интервалов всегда счетно!

Теперь из каждого интервала на основании аксиомы выбора последовательно отберем по одной точке — представителю интервала и сформируем из них новое множество $P \subset M$. Очевидно, что это точечное подмножество будет счетно и унаследует от исходного множества M упорядоченность. Поскольку интервалы при отборе точек мы выбирали последовательно, в соответствии с естественной упорядоченностью множества M, то на P формируется упорядоченность и по движению.

При этом множество P не будет обладать плотностью: β-бесконечности оказываются как бы «упакованными» внутрь интервалов и уже не мешают движению на множестве P. Условия проходимости, сформулированные выше, на множестве P выполняются.

Итак, решение загадки движения заключается в том, что, не имея возможности континуально двигаться по множеству M, мы в то же время можем двигаться по его счетному подмножеству P, каждая точка которого является представителем соответствующего интервала на M.

Мешавшие нам β-бесконечности мы, условно говоря, «сбросили» внутрь интервалов. Но отсюда следует, что движение внутри самих интервалов в силу их плотности остается невозможным. Мы движение «от точки к точке» на множестве M по сути заменили на движение «от интервала к интервалу», чем и решили проблему движения.

Можно сказать, что интервал отображается в представляющую его точку, реализующую движение. С другой стороны, интервал наследует от точки ее свойство — невозможность внутри себя локализовать движение. Происходит своего рода делокализация точки на интервале. Поскольку интервал содержит β-бесконечность, то получается, что представляющая его точка является «образом бесконечности».

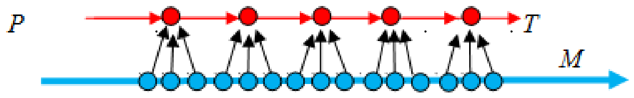

Рис. 11. Решение проблемы движения.

Итак, подмножество *P* представляет множество След для движения на несчетном множестве *M*, т.е. $P \equiv T$. Но *P* является счетным подмножеством *M*, и вследствие этого движение не затрагивает подмножество $M \backslash P$. Следовательно, любое движение на непроходимом несчетном множестве не может быть континуальным, так как подмножество $M \backslash P$ не может быть пустым.

Собственно говоря, это расплата за возможность движения на несчетном множестве (в том числе числовой прямой).

Итак, главный вывод: движение возможно на любом множестве, но оно всегда имеет дискретный характер, а континуальное движение невозможно. Другая формулировка этого вывода: любое множество содержит проходимое подмножество.

В принципе возможна трактовка движения, приписывающая прохождение каждой точки на множестве След как совместное прохождение одновременно всей группы точек из соответствующего ей интервала на множестве *M*. Но характер движения при таком представлении все равно остается прежним.

Можно сказать, что движение порождает дискретность в нашем мире.

Полученные результаты влекут за собой ряд важных следствий.

Утверждение вида «переменная x пробегает все вещественные значения числовой прямой от x_0 до x_1» является некорректным. В любых математических построения нужно с осторожностью относиться к такого рода формулировкам. Провести непрерывную линию (не отрывая карандаша от бумаги) невозможно — в ней обязательно будут пробелы.

Если двигаться по плоской петлеобразной кривой с самопересечением (см. рис. 12), то существует возможность, что в связи с дискретностью множества *P* (или множества След) самопересечений при движении не будет.

Еще одно интересное следствие. Как известно, отрезок, соединяющий внутреннюю точку a замкнутого множества *M* с внешней точкой *b*, пересекается с границей множества *M* [13]. Однако ситуация существенно меняется, если нам нужно выбраться из этого множества наружу, двигаясь из внутренней точки *a*. Поскольку множество След не является непрерывным, в процессе движения из точки *a* в точку *b* оно может и не пересекаться с границей множества *M*. Получается, что у движущегося объекта существует потенциальная возможность «пройти сквозь стену»!

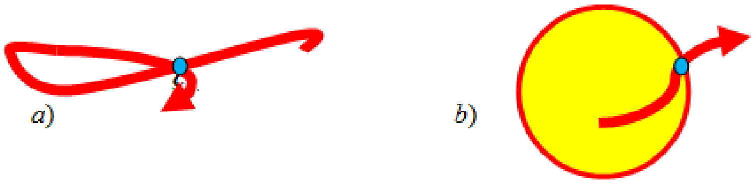

Рис. 12. а) — возможность отсутствия самопересечения при движении по петлеобразной кривой, *b*) — возможность в движении выйти наружу из замкнутой области.

Самый важный вывод для физики — любое механическое движение в пространстве неизбежно будет квантоваться. Первопричиной квантования является нарушение VIII аксиомы Евклида («Целое больше части»), следствием чего является возможность существование рефлексивных в отрезок множеств. А такие множества не позволяют существовать континуальному движению, вследствие чего любое движение становится дискретным, т.е. квантуется.

Здесь возникает интересный момент. Рефлексивные множества находятся в опасной близости от проблемы существования множеств, содержащих самих себя в качестве подмножеств. Допущение существования таких множеств приводит, например, к известному парадоксу брадобрея. Вкратце он состоит в следующем: брадобрею в некотором полку отдается приказ: он должен брить только тех, кто не бреется сам. Но что будет, если этот приказ обратить на бритье самого брадобрея? Если он будет брить сам себя, то нарушит приказ. Если он не будет брить себя, он снова нарушит приказ.

Этот и подобные ему парадоксы, сформулированные Бертраном Расселом, привели к созданию аксиоматик теории множеств, где тем или иным образом исключалось существование множеств, содержащих себя в качестве подмножеств. Вместе с тем в парадоксе брадобрея как абсурдное исключалось решение, при котором брадобрей и брился и не брился одновременно. Но ведь это тоже решение, хотя и противоречащее обыденным представлениям и принципу исключения третьего.

Однако если принять выстроенную в докладе логику, мы приходим к квантованию. А в квантовой физике имеется парадокс кота Шредингера: квантовая механика допускает парадоксальную ситуацию, когда кот может быть и живой, и мертвый одновременно. Складывается впечатление о неслучайности близости ситуации с задумчивым брадобреем и бедным котом.

Другой существенный вывод. В физике широко используется понятие «фазовое пространство». Состояние сколь угодно сложной системы представляется в фазовом пространстве одной единственной точкой, а эволюция этой системы — перемещением этой точки. Поскольку, как мы показали, любое движение (перемещение) дискретно, это значит, что эволюция любой системы, которую можно описать с помощью фазового пространства, совершается дискретно. И в природе непрерывных процессов не существует.

4.4. Разрешение апорий Зенона о движении.

Представление движения не через длину, а через мощности множеств, составляющих интервалы движения, позволило учесть их фундаментальные свойства (которые не просматривались ранее), и поставило все на свои места. Показано, что на основе теоретико-множественного подхода можно подтвердить справедливость выводов Зенона о невозможности *непрерывного* движения. Отсутствие противоречия с фактом движения в окружающем нас мире объясняется тем, что наблюдаемые вокруг нас движения на самом деле непрерывными не является. Таким образом, проблематику апорий Зенона о движении можно считать разрешенной, а противоречия исчерпанными.

Возникает вопрос: если множество След всегда имеет дискретный характер, то каков минимальный размер «шага», или кванта движения? К сожалению, этот размер средствами теории множеств определить не удается, так как в ее рамках на множестве вещественных чисел отсутствует связь между мощностью и длиной. Можно высказать предположение, что размеры квантования определяются физическими законами конкретной Вселенной. И природа допускает существование только тех миров, в которых такое квантование происходит. В противном случае такая Вселенная коллапсирует в мертвый «мир Парменида».

В заключение следует отметить следующий момент. Новое представление о движении совсем не предполагает отказ от классического представления. Оно только очерчивает границы его применения.

Другой интересный вопрос. Можно ли в рамках изложенной теории движения ввести такие количественные характеристики, как скорость и ускорение? В принципе можно. С этой целью нужно ввести первичное движение, принять его как эталонное, и с ним соотносить иные движения. Это даст недостающие количественные характеристики движения.

Можно использовать следующий прием для построения эталонного движения. Берем некоторое множество замеров текущего положения точки и упорядочиваем их в порядке нарастания полученных значений. Полагаем, что это будет строго монотонная последовательность. Рассматриваем ее как эталонное движение. Она в силу этого лишено собственных количественных характеристик движения. Далее соотносим к этим измерениям положения других объектов и определяем их собственные движения относительно эталонного движения. Т.е. установить биекцию между ними. Далее уже нетрудно установить количественные характеристики движения. В качестве эталонного удобнее всего брать такое движение (изменение), которое совершается постоянно, т.е. каждое измерение дает новые результаты.

В нашем мире этим условиям удовлетворяет постоянные изменения четвертой (внепространственной) компоненты в координатном кортеже любого массивного физического тела, которое можно рассматривать как эталонное движение: в координатном кортеже (x^0, x^1, x^2, x^3)

компонента x^0 резко отличается от других (пространственных) компонент (x^1, x^2, x^3) тем, что испытывает постоянные изменения. Именно поэтому (временная) компонента x^0 естественным порядком стала всеобщим «посредником» при описании движений.

Литература:

1. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. — М.: Физматлит, 2011.
2. *Колмогоров А.Н.* «Математика» // В кн.: Большая Советская энциклопедия. 2-е изд. Т. 26. — М., 1954.
3. *Юшкевич А.П.* Декарт и математика // Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статьи А.П. Юшкевича. — М.; Л.: Гостехиздат, 1938.
4. *Энгельс Ф.* Диалектика природы. — М.: Госполитиздат, 1948
5. *Декарт Р.* Сочинения в 2 т. — М.: Мысль, 1989.
6. *Юшкевич А.П.* История математики с древнейших времен до начала XIX века. Т. 3. — М.: Наука, 1972. — С. 243.
7. *Кольмен Э.* Бернард Больцано. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
8. *Nikolenko O.D.* The Nature of physical motion and Zeno's paradox. // Physics Essays, **25**, 3, (2012).
9. *Николенко А.Д.* К вопросу о применении парадокса Зенона для изучения природы механического движения. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — Т. 12. — 2012. — № 1. — С. 55-64.
10. *Николенко А.Д., Лебедев Ю.А.* Преждевременные открытия. // Млечный путь. — 2012. — № 3. — С. 226.
11. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? —3-е изд., испр. и доп. — М.:МЦНМО, 2001.
12. *Натонсон И.П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
13. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968.
14. *Галилео Галилей.* Пробирных дел мастер. — М.: Наука, 1987.
15. *Вечтомов Е.М.* Математика: основные математические структуры. — М.: Изд-во Юрайт, 2018.
16. Справочная книга по математической логике / Под ред. Дж. Барвайса. Ч. II. Теория множеств: Пер. с англ. — М.: Наука, 1982.
17. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. — М.: Объединенное научно-техническое издательство, 1937.
18. *Эйлер Л.* Основы динамики точки. / Под ред. В.П. Егоршина. — М.-Л.: Гостехиздат, 1938.
19. *Архимед*. Архимеда две книги о шаре и цилиндре, измерение круга и леммы. / Перевод с греческого (леммы с латинского) Ф. Петрушевского с примечаниями и пополнениями. — СПб., 1823.
20. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. В 2-х т. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
21. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. — Одесса: Изд-во «Матезис», 1914.
22. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. — 7-е изд. — М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2002.
23. *Гильберт Д.* Основания геометрии. 1948. — М.-Л.: Огиз, 1948.
24. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. — М., 1979.
25. *Даан-Дальмедико А., Пенффер Ж.* Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. — М., 1986.
26. *Френкель А.А., Бар-Хиллел Р.* Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966.
27. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985.

Статья поступила в редакцию 24.01.2019 г.

Nikolenko O.D.

The concept of motion and the inevitability of its quantization

The problems that arise when constructing a time-independent definition of mechanical motion are considered. The key role of the concept of infinity in the understanding of mechanical (and other varieties) of motion is noted. It is shown that only naturally occurring quantization of motion leads to the elimination of motion paradoxes (aporia of Zeno, etc.).

Keywords: concept of motion, set theory, paradoxes of motion, aporia of Zeno, quantization theory, theory of time.