УДК 531.1

Николенко А.Д.

О ПОНЯТИИ ДВИЖЕНИЯ И НЕИЗБЕЖНОСТИ ЕГО КВАНТОВАНИЯ

Институт исследования природы времени, Международное общество по изучению времени (ISST)
E-mail: antares2090niko@gmail.com

Рассмотрены проблемы, возникающие при построении времянезависимого определения механического движения. Отмечена ключевая роль понятия бесконечности в понимании механического (других разновидностей) движения. Показано, что только естественно возникающее квантование движения приводит к устранению парадоксов движения (апории Зенона и т.д.).

Ключевые слова: понятие движения, теория множеств, парадоксы движения, апории Зенона, теория квантования, теория времени.

Введение

В процессе разработки теории времени на основе концепции течения времени как особой разновидности механического внепространственного движения мы столкнулись с трудностью уже на стадии изучения самого представления о движении: оно является внутренне противоречивым и в силу этого его использование для изучения природы времени является проблематичным. Классическое представление о движении само связано с течением времени, что порождает порочный круг и исключает его использование для исследования природы времени.

Необходимо времянезависимое представление о движении.

С античных времен наука строилась по аксиоматическому принципу. В качестве исходных утверждений (аксиом и постулатов) выбирались объективные самоочевидные истины, не вызывавшие ни у кого сомнений. Такими истинами были аксиомы и постулаты Евклида.

Однако в XIX веке рухнула первая из этих самоочевидных истин — V постулат Евклида о параллельных прямых [1]. На его обломках Николаем Лобачевским, а затем и другими учеными была построена новая геометрия. Крах этого постулата был очень плодотворным и привел к пересмотру наших представлений о пространстве и времени.

Затем рухнула следующая из самоочевидных истин — VIII аксиома Евклида [1]. «Totum parte majus» — «Целое больше части». Сомнения в ее истинности высказывал еще Галилей. Георг Кантор, отказавшись от этой аксиомы, сумел построить теорию множеств, которая в своем развитии легла в основу всей современной математики. И здесь отказ от «самоочевидной» истины оказался исключительно плодотворным. В настоящей работе рассматриваются новые следствия отказа от этой аксиомы.

Часть 1. Проблемы в понимании движения

1.1. Появление и изгнание движения из математики

Как отметил академик А.Н. Колмогоров [2] «Потребности бурно развивавшегося естествознания и техники (мореплавания, астрономии, баллистики, гидравлики и т.д.) привели к введению в математику идей движения и изменения, прежде всего в форме переменных величин и функциональной зависимости между ними».

В аксиомах и постулатах Евклида движение отсутствовало вообще. Идея переменной началась с Декарта [3]. Он впервые на строгой основе ввел понятие переменной величины. Ф. Энгельс писал по этому поводу: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина.* Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика,* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление* [4]. В труде «Начала философии» Декарт дал такое определение движению: это «…перемещение одной части материи или одного тела из соседства тех тел, которые его непосредственно касались и рассматривались как покоящиеся, в соседство других тел» [5]. Лейбниц дифференциалы аргумента и функции определял как бесконечно малые приращения, имеющие вид сколь угодно малых конечных отрезков. Такого же подхода придерживался Ньютон.

Вместе с тем многие крупные ученые не принимали использование идеи движения в математике. В частности, Лагранж, в противоположность Ньютону и Маклорену, в своей «Теории аналитических функций» отмечал: «Вводить в исчисление, имеющее предметом только алгебраические величины, движение, значит вводить в него чужеродную идею» [6]. Такой же позиции придерживался и Больцано: «…понятие времени, а тем более движения столь же чужеродно в общей математике, как и понятие пространства» [7].

С проблемой использования понятия движения в начале XIX века столкнулся О. Коши во время своей работы по созданию строгой основы для математического анализа. Проблема при использовании понятия движения в математике, по его мнению, заключались в том, что при движении невозможно определить следующее за данным число (это прямое следствие плотности вещественной числовой оси). Кроме того, существовали сложности, вытекающие из апорий Зенона о движении [8,9,10].

Вот как описывают сложившуюся ситуацию Р. Курант и Г. Роббинс в широко известной книге «Что такое математика?» [11]: «При изучении движения в частности и какого бы то ни было изменения в общем случае математики XVII и XVIII столетий принимали, как нечто достаточно наглядное и не подлежащее дальнейшему анализу, концепцию величины x, меняющейся и в своем непрерывном течении приближающейся к предельному значению x_1. Они рассматривали другую величину $u = f(x)$, зависящую от времени или от какой-нибудь другой зависящей от времени величины. Оставалось все же проблема: какой точный математический смысл следует приписывать представлению о том, что $f(x)$ «стремится» или «приближается» к определенному значению a, когда x движется к x_1?

Однако еще со времен Зенона и его парадоксов все попытки дать точную математическую формулировку интуитивному физическому или метафизическому понятию непрерывного движения были безуспешными. Нет затруднений в продвижении шаг за шагом по дискретной последовательности значений a_1, a_2, a_3, ... Но когда приходится иметь дело с непрерывной переменной x, пробегающей целый интервал значений на числовой оси, то описание того, как x «приближается» к заданному значению x_1, затруднено тем, что принимаемые значения из интервала не могут быть указаны последовательно в порядке их возрастания. В самом деле, точки прямой представляют везде плотное множество, и не существует точки, «следующей» за данной. …

Существенным достижением Коши является то, что он ясно осознал, что, поскольку дело касается математических понятий, всякая ссылка на интуитивное представление о непрерывном движении должна быть отброшена. … Если мы проанализируем логически, что надлежит понимать под «непрерывным приближением» и какие существуют способы для того, чтобы в каждом отдельном случае проверить, имеет ли место таковое, то мы вынуждены будем принять именно то самое определение, которое дано Коши, и никакое иное. Это определение — статическое; оно не опирается на интуитивную идею движения. … В определении с помощью ε, δ независимая переменная не «движется»; она не «стремится» и не «приближается» к пределу x_1 в каком бы то ни было физическом смысле. Правда, эти обороты речи, как и символ $\rightarrow$, сохраняются, причем математик вовсе не обязан отказываться от тех, в общем-то весьма полезных, интуитивных представлений, которые с ними связываются».

Отметим, что отсутствие «соседних» точек траектории движения, как и возникновение апорий Зенона является следствием бесконечной делимости пространственного интервала, т.е. являются результатом все той же плотности вещественной оси. Коши, Вейерштрассу и их последователям удалось сформулировать строгие основы анализа без использования понятия движения и таким образом избавиться от этих проблем. Теперь вместо «движения», «стремления», «пробегания» переменной x в направлении точки x_1 ($x \rightarrow x_1$) по сути стал рассматриваться произвольный перебор значений переменной (аргумента и функции) с дальнейшим исследованием возможности их попадания в произвольно выбранные малые окрестности ε, δ. Таким образом, движение исключалось, а удобная запись вида $f(x) \rightarrow a$ при $x \rightarrow x_1$ приобрела чисто формальный характер. Математика стала статичной наукой.

1.2. Современные представления о движении в математике и физике

В современной математике движение определяется как изометрия метрического пространства в себя. Таким образом, движение в такой интерпретации представляет собой определенный вид биекции, т.е. отображения некоторого начального положения в конечное — см. например [12]: «…движением называется такое отображение множества Z в множество Z, которое не изменяет расстояний между точками».

Следовательно, сам процесс движения в этом определении оказывается скрытым, рассматривается лишь начальное и конечное положение этой операции. Представление о движении как отображении сохраняет статичность такой модели, а особенности изменений, происходящих в самом процессе движения, выпадают из поля зрения исследователя.

Эту трудность обычно пытаются преодолеть путем рассмотрения движения как непрерывного процесса. По П.С. Александрову непрерывным движением называется такое движение пространства E, которое непрерывно зависит от параметра $t \in [t_0, t_1]$ (в механике роль этого параметра играет время). В процессе движения текущее значение величины t непрерывным образом возрастает от начального значения t_0 до конечного t_1, т.е. $t_0 \le t \le t_1$ [13].

Однако такое определение все равно не решает проблему. Действительно, интервал $[t_0, t_1]$ можно взаимно однозначно отобразить на числовую ось, и тогда наличие такого изменяющегося параметра t само выглядит как непрерывное движение, нарастание данного параметра вдоль числовой оси от начальной точки до конечной точки. Следовательно, мы получаем порочный круг, так как исходное определяемое движение задается в свою очередь через изменение, т.е. по сути движение текущего значения параметра t. Это обесценивает данный подход к определению непрерывного движения.

Заметим, что аналогичная проблема существует и при определении движения в физике. Механическое движение определяется как изменение положения физических тел (задаваемого изменением расстояний — координат тел в некоторой системе отсчета), происходящее с течением времени. Однако в таком определении отсутствует существенная часть, а именно определение изменяющегося времени. Поэтому физическое определение движения также содержит порочный круг и в силу этого является неполноценным.

Итак, математика в настоящее время остается наукой статичной, можно сказать искусственно отделенной от одного из самых распространенных свойств природы — движения.

1.3. Парадокс движения

Сложилась парадоксальная ситуация:

- в математике движение является нелегитимным и исключается из рассмотрения;
- при этом физика (которая в своей значительной части является наукой о движении) для описания движения использует именно математические модели!

Следовательно, физика использует нелегитимный аппарат для описания одного из самых значительных физических процессов, и, таким образом, может содержать противоречия. И она их содержит. Примером таких противоречий являются апории Зенона.

Некорректность использования математики для описания движения и порождает данный парадокс.

Но, как справедливо отметил Г. Галилей: «Книга природы написана языком математики» [14]. Математика обязана содержать движение, если она действительно отражает реальный мир, окружающий нас. Существует необходимость в определении движения вообще и непрерывного движения в частности, адекватно отображающего суть этого природного явления и не содержащего парадоксов.

Часть 2. Движение на множествах

2.1. Некоторые исходные положения

Доклад построен с учетом междисциплинарного состава участников семинара. Напомним некоторые необходимые в дальнейшем сведения из теории множеств.

Исследовательским аппаратом будет одна из базовых теорий, лежащих в основе математики — теория множеств в аксиоматике ZFC, с признанием аксиомы выбора.

Сведения из теории множеств, понятия и символика, необходимые для дальнейших рассуждений, общеприняты и находятся, например, в монографиях [15]. Они обеспечивают начальное понимание материала, поэтому будут считаться известными и иногда будут использоваться без комментариев. Напомним некоторые из них, существенные для дальнейшего изложения.

Основным объектом исследования станут точечные множества, преимущественно линейно упорядоченные. В данной работе рассматриваются евклидовы точечные пространства. Заметим, что любой путь, пройденный движущимся точечным телом в евклидовом пространстве, может быть представлен в виде некоторой жордановой кривой (линейно упорядоченного точечного множества). Этого для наших целей будет вполне достаточно, и привлечения представлений о линии в смысле Кантора или Урысона необходимости нет. Пространственная кривая, представляющая траекторию точечного тела, может быть отображена взаимно однозначным образом на числовую прямую (числовую ось). В связи с этим для наших целей вполне достаточным будет исследование движения на числовой прямой.

Числовая прямая (множество вещественных чисел) будет рассматриваться и как линейно упорядоченное множество (преимущественно), и как метрическое пространство. Оба эти подхода приводят к одной и той же топологии на числовой прямой, т.е. к одному и тому же топологическому пространству.

Множество M называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором круге K. Если K — такой круг, то $M \subset K$. Множество, не содержащее ни одной своей граничной точки, т. е. состоящее из одних внутренних точек, называется *открытым*. Множество, содержащее все свои граничные точки, т. е. совпадающее со своим замыканием, называется *замкнутым*.

Любое конечное множество является ограниченным, но обратное неверно: существуют ограниченные, и при этом бесконечные множества.

На упорядоченном множестве можно задать интервал. Открытый интервал $(a;b)$ упорядоченного множества X представляет собой множество элементов $x \in X$, лежащих между элементами a и b. Если к интервалу (a,b) добавить его конечные (граничные) элементы a и b, получим сегмент $[a,b]$. Таким образом, структура сегмента имеет вид:

$$[a,b] = a\text{U}(a,b)\text{U}b = \{a,(a,b),b\}. \quad (2.1)$$

Если $(a,b) = \varnothing$, то элементы a и b являются соседними. Множество без соседних элементов (т.е. при $\forall\, a \,\forall\, b\ (a,b) \neq \varnothing$) является *плотным* (т.е. бесконечно делимым).

При линейной упорядоченности, например на числовой прямой, получаем понятия интервала (промежутка, открытого интервала) и сегмента (отрезка, замкнутого интервала) на множестве вещественных чисел **R**. Если интервал дополнить только одним из граничных элементов, получаем полуинтервалы (полусегменты):

$$[a,b) = a\text{U}(a,b) = \{a,(a,b)\},\ (2.2)$$

$$(a,b] = (a,b)\text{U}b = \{(a;b),b\}.\ (2.3)$$

Наименьшая из всех верхних границ множества M называется *точной верхней границей* множества M и обозначается как sup M**.** Наибольшая из всех нижних границ множества M называется *точной нижней границей* множества M — inf M.

Подмножество Q линейно упорядоченного множества X именуется *конфинальным* X, если для любого $x \in X$ существует элемент $y \in Q$ такой, что $x \leq y$.

Сечением упорядоченного множества M называется такое разбиение множества M на два подмножества A и B, что каждый элемент одного подмножества, например A, предшествует каждому элементу подмножества B. При этом возможны следующие случаи.

1. В нижнем подмножестве A есть наибольший элемент a, в верхнем подмножестве B есть наибольший элемент b. Такое сечение называют *скачком*. В этом случае (a,b) есть пустой интервал: $(a,b) = \varnothing$. Обратно, всякому пустому интервалу (a,b) в этом случае соответствует скачок.
2. В нижнем подмножестве есть наибольший элемент, а в верхнем подмножестве нет наименьшего; или в нижнем подмножестве нет наибольшего элемента, но есть наименьший в верхнем подмножестве — это дедекиндовы сечения.
3. В нижнем подмножестве нет наибольшего элемента, а в верхнем — наименьшего. Такая ситуация именуется *щелью*.

Упорядоченное множество, не имеющее щелей, является замкнутым. Всякое замкнутое множество имеет наибольший и наименьший элементы. Если все сечения упорядоченного множества M дедекиндовы, то это множество непрерывно. Непрерывное упорядоченное множество называется *открытым*, если у него нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов.

Линейно упорядоченное множество (или цепь) является *плотным*, если между любыми двумя элементами лежит бесконечно много элементов из X. Цепь X называется дискретным упорядоченным множеством, если любое сечение в X является скачком. Плотность X равносильна отсутствию скачков в ней, полнота X равносильна отсутствию щелей в ней.

Конечную последовательность множеств $M_1, M_2, M_3, \ldots M_f$ также называют цепью, если

$$M_1 \cap M_2 \neq \varnothing,\ M_2 \cap M_3 \neq \varnothing,\ \ldots\ M_{f-1} \cap M_f \neq \varnothing.$$

Мы допускаем возможность проведения исследований объекта (множества) путем выполнения соответствующих измерений. Под термином *измерение* будем понимать аналог того, что в физике считается «наблюдаемым фактом», т.е. установление некоторого факта, характеризующего исследуемый математический объект. Например, установление позиции рассматриваемого элемента множества на числовой оси. Для чего, очевидно, необходимо располагать точкой отсчета и единицей измерения.

Проводить измерение можно «одновременно», или *совместно*. Очевидно, что результаты таких измерений должны быть идентичными. С другой стороны, можно проводить изменения многократно, т.е. *несовместно*. В этом случае результаты замеров могут различаться. Отметим, что при таком подходе в использовании понятия времени для определения совместных или несовместных измерений нет необходимости. Это дает возможность в дальнейшем применять полученные результаты для изучения самого феномена времени.

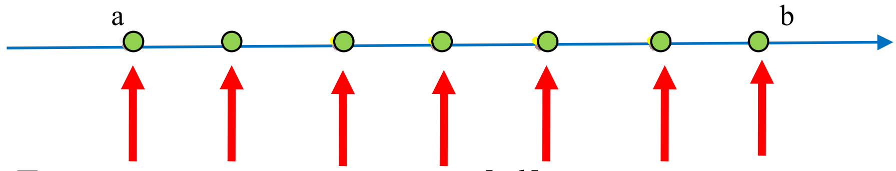
2.2. Формирование множеств на интервалах и их особенности

Сформировать линейно упорядоченное точечное множество X можно путем размещения элементов этого множества на позициях числовой прямой. В этом случае на множество X индуцируется линейная упорядоченность от множества вещественных чисел **R** (числовой прямой).

В свою очередь, если Y — подмножество упорядоченного множества, в частности, размещенное на интервале (отрезке) множества X, то на Y возникает естественный порядок, индуцированный из X.

Положим, что нам необходимо сформировать замкнутый интервал линейно упорядоченного точечного множества X, причем положение на нем любого элемента множества X характеризуется его позицией на вещественной числовой прямой. Граничные позиции крайних элементов $x_1, x_n \in X$ заданы: $x_1 = a$ и $x_n = b$. Формировать интервал будем путем установки элементов множества X на числовой прямой на позиции, соответствующие заданному отношению порядка. Заполнить интервал можно двумя основными способами.

Первый способ. Он характеризуется тем, что каждый элемент $x \in X$ занимает свою позицию независимо от того, заняли ли свои позиции иные элементы множества (см. рис. 1).



Параллельное заполнение интервала [a,b] элементами множества.

Рис. 1. Параллельный способ заполнения интервала.

Будем именовать сформированный таким способом замкнутый интервал *интервалом протяженности*.

Второй способ заполнения интервала заключается в том, что элементы множества X занимают свои позиции последовательно (см. рис.2).

Каждый элемент занимает свою позицию только после того, как свою позицию заняли все элементы, находящиеся от него слева, начиная с крайнего слева элемента. Для занятия своего положения элементу достаточно, чтобы встал на свое место его сосед слева. Будем именовать формируемый таким образом замкнутый интервал *интервалом нарастания*.

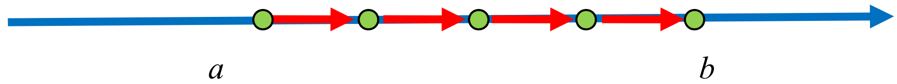


Рис. 2. Последовательное заполнение интервала.

В первом случае количество элементов, заполняющих интервал, возрастает произвольным образом. Любой участок интервала заполняется независимо от заполнения других его участков. Во втором случае такое нарастание строго упорядочено, и любой участок может заполняться только после того, как заполнены все участки интервала слева от него.

2.3. Количественные характеристики множеств

Выделим некоторые параметры множеств, которые можно рассматривать как их количественные характеристики. В первую очередь к таким характеристикам множества следует отнести его мощность — см. например [16].

Понятие мощности в общем случае является аналогом понятия количества элементов множества. Мощность $|X|$ конечного множества X определяется числом его элементов n, и выражается кардинальным числом, т.е.

$$|X| = n.$$

Сами множества могут быть конечными и бесконечными (в том числе счетными и несчетными). Мощность бесконечных множеств также выражается с помощью кардинальных чисел (кардиналов). Для бесконечных счетных множеств (элементы которых можно взаимно однозначно сопоставить множеству натуральных чисел) — кардинальным числом $\aleph_0$, бесконечных несчетных — кардинальным числом $\boldsymbol{c}$ (мощность континуума). Другие бесконечные множества рассматривать не будем.

Для определения кардинального числа множества совсем не обязательно пересчитывать все его элементы. Могут быть использовать косвенные методы. Например, если рассматриваемым множеством являются золотые монеты в мешке, то мощность такого множества можно определить путем его взвешивания, не прибегая к пересчету его элементов (монет).

Удобство введенного Кантором понятия мощности заключается в том, что его можно применить к любым множествам, в том числе бесконечным. Это обуславливает широту его применения, позволяя сделать бесконечные множества объектом количественного анализа. При этом для бесконечных кардинальных чисел характерно невыполнение некоторых основных законов арифметики.

Для линейно упорядоченных измеримых точечных множеств может быть введена также другая количественная характеристика — мера. На множестве X она обозначается как $\mu(X)$. Будем опираться на меру Лебега, см. например [12]. Для интервала $[a,b]$ на числовой прямой она будет выражаться длиной этого интервала:

$$\mu(X) = d(b - a) = |b - a|. \tag{2.4}$$

Отметим тот важный факт, что множества, имеющие равную мощность, при этом могут иметь разную длину (см. например [17]).

Подчеркнем, что мощность множества зависит от всех его элементов в заданном интервале (в котором оно размещено), тогда как мера, рассматриваемая как длина интервала, полностью определяется всего лишь его двумя конечными (граничными) элементами. Причем эти элементы могут даже не входить в состав самого множества: например, в случае открытого интервала $I = (a,b)$ элементы a и b в состав интервала I не входят.

Кроме того, в отличие от мощности, понятие меры применимо не ко всем множествам.

При изучении движения на множестве ограничимся этими двумя количественными характеристиками множеств.

2.4. «Удельная плотность» множеств или их «твердость»

Поскольку для линейно упорядоченного множества мы можем определить две различные количественные характеристики — мощность и меру, то интересно рассмотреть их взаимосвязь. Пусть задан некоторый замкнутый интервал $[a,b]$ вещественной прямой, на котором размещено конечное множество X. Тогда отношение числа элементов множества X, уместившихся на этом интервале, отражает своего рода удельную «плотность» множества. Поэтому наиболее естественно было бы назвать эту характеристику «плотностью». Однако данный термин уже используется в теории множеств [13,17] и имеет несколько иное содержание. Понятие «плотности» множества в современной теории множеств не является количественной характеристикой, а отражает другие свойства множества, в частности выполнение на ней аксиомы плотности [17]. Термин «удельная плотность» обладает теми же недостатками.

Поэтому, чтобы избежать проблем с использованием термина «плотность» в нашем понимании, мы вынуждены использовать новый термин для характеристики множеств — *твердость*, характеризующий число элементов множества, приходящееся на единицу длины. Вводимая таким образом величина ψ является количественной характеристикой множества, и отражает «тесноту» размещения ее элементов на числовой прямой.

Рассмотрим некоторое упорядоченное множество X, обладающее мощностью, выражаемую кардинальным числом $|X|$, с заданной мерой $\mu(X)$. Тогда его твердость будет выражаться записью $\psi(X)$ и в общем случае задаваться отношением:

$$\psi(X) = \frac{|X|}{\mu|X|}. \tag{2.5}$$

Таким образом, для конечных множеств значение $\psi(X)$ может быть получено как частное от деления числа элементов множества на длину занимаемого этими элементами интервала.

Можно определить понятие твердости множества X в произвольной точке a на вещественной прямой **R** — это предел отношения (если он существует):

$$\psi(X)_a = \lim_{x\to a}\frac{\left|X\bigcap[x,a]\right|}{d(a-x)}.$$

Здесь $|X\cap[x,a]|$ — мощность подмножества $X(x,a)\subset X$, заключенного в интервале $[x,a]$, $d(a–x)$ — длина этого интервала.

Для упрощения далее будем в основном рассматривать однородные множества, твердость которых равномерно распределена по всей их протяженности ($\psi(X)$ = const). Соотношение (2.5) позволяет рассчитать мощность подмножества на интервале:

$$|X| = \psi(X)|x_j - x_i|. \tag{2.6}$$

Здесь $|x_j - x_i|$ — длина соответствующего замкнутого интервала $[x_i,x_j]$ на множестве **R**.

Можно обобщить вводимое понятие на бесконечные множества, когда их подмножества на конечных интервалах содержат бесконечное число элементов. Будем называть такие множества бесконечными на интервалах. В этом случае для задания мощности в числителе выражения (2.5) используются бесконечные кардинальные числа, а $\psi(X)$ задается в виде отношения.

В рассматриваемом случае $\psi(X)$ будет выражаться бесконечным кардинальным числом. Действительно, из соотношения (2.6) видно, что произведение $\psi(X)|x_j - x_i|$ будет соответствовать бесконечному кардинальному числу, отражающему мощность множества на рассматриваемом интервале. Но поскольку длина интервала $|x_j - x_i|$ является вещественным числом, то оставшийся второй сомножитель должен быть бесконечным кардинальным числом, что и доказывает исходное утверждение.

Если числитель в отношении (2.6) задан бесконечным кардинальным числом, будем говорить, что в этом случае рассматриваемое подмножество на данном интервале твердое. Для случая, когда мощность в числителе равна мощности континуума $\boldsymbol{c}$, будем говорить, что рассматриваемое подмножество абсолютно твердое.

Если любое подмножество множества X, заданное на конечном интервале, является твердым, то будем говорить, что X — всюду твердое множество.

Являются ли плотные множества всюду твердыми? Являются. Аксиома плотности, определяющая плотные множества, утверждает, что для любых двух произвольно взятых элементов упорядоченного плотного множества X всегда найдется элемент, лежащий между ними: $a,b,c\in X$: $\forall a\forall b\exists c$ $(a<c<b)$. Это означает *бесконечную делимость*: любой произвольный интервал (a,b) на таком множестве всегда может быть разделен на два новых: (a,c) и (c,b), и так далее. Такой процесс на плотном множестве может быть бесконечным. Из выполнимости аксиомы плотности и с учетом аксиомы выбора следует также, что любое заданное на произвольном интервале подмножество всюду плотного множества является бесконечным: каждый из бесконечного числа интервалов, получающихся в результате последовательного деления, не пуст и содержит элементы рассматриваемого множества. Следовательно, число таких элементов бесконечно. Очевидно, что мощность этого подмножества всегда будет выражаться бесконечным кардинальным числом, которое представит числитель отношения (2.5). И мы по определению получаем твердое множество. Можно также сказать, что плотное множество, обладающее бесконечной делимостью, является также всюду твердым.

2.5. Диаграмма «Мера-мощность»

Полезно сопоставить обе количественные характеристики линейно упорядоченных множеств в виде специальной диаграммы.

Для этого по горизонтальной оси на числовой прямой откладываем отрезок $[x_0,x]$. Здесь x_0 — $\inf X$ — нижняя грань множества, x — значение (позиция) рассматриваемого элемента. По вертикальной оси откладываем кардинальное число — мощность подмножества $X(x_0,x) \subset X$, размещенного на отрезке $[x_0,x]$. Диаграмма для конечного множества будет иметь следующий вид (см. рис. 3):

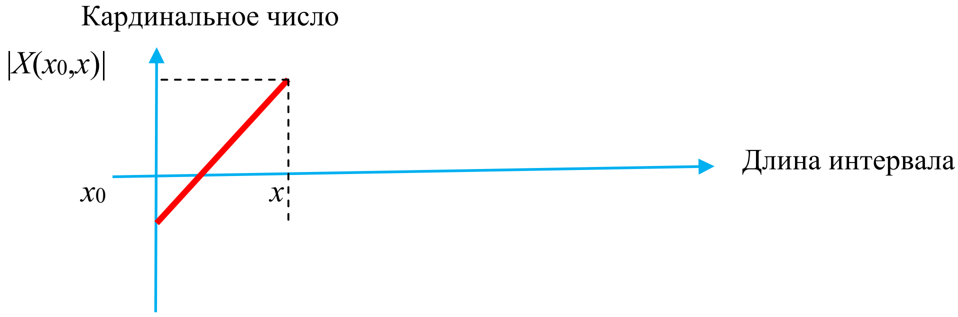


Рис. 3. Диаграмма «Мера-мощность» для конечного множества (блок конечных множеств).
Увеличение длины участка $[x_0,x]$ приводит к увеличению числа элементов множества на нем.

Наклон линии диаграммы отражает твердость множества.

Для бесконечных множеств необходимо диаграмму дополнить блоком бесконечных кардинальных чисел (см. рис. 4), который в отличие от предыдущего случая имеет условный характер и размещается над блоком конечных множеств. В этом случае верхняя часть блока конечных множеств также имеет условный характер.

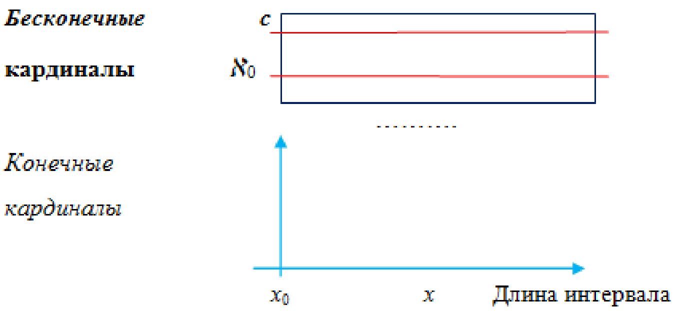


Рис. 4. Диаграмма «Мера-мощность» для бесконечных множеств.

2.6. Движение на множествах

Напомню, что для достижения общности и возможности в дальнейшем применять полученные результаты к изучению природы времени, нам придется исключить понятие «Время» из рассматриваемых первичных определений движения.

Любое определение движения всегда связано с локализацией движущегося субъекта движения. Евклид в своих «Началах» в «Определении 1» определил точку как то, что не имеет частей [1]. Это определение можно интерпретировать как утверждение о том, что внутри точки локализоваться различным образом невозможно. Если принять это утверждение, то из него следует, что любое движение возможно только вне точки, поскольку оно всегда связано с локализацией. В связи с этим движение, которое мы хотим определить, должно опираться на точки как минимально возможный объект локализации, и сформированные из них множества.

2.6.1. Определение движения, опирающееся на классические представления

Л. Эйлер в труде «Основы динамики точки» определял движение так: «Движение есть перемещение тела из одного места, которое оно занимало, в другое место» [18]. Это классическое определение движения.

Заметим, однако, что, во-первых, «движение» и «перемещение» — синонимы. Поэтому в формулировке «Движение есть перемещение…» уже присутствует очевидный порочный круг. Во-вторых, по сути, здесь речь идет о расстоянии между двумя «местами». Преодоление этого расстояния (протяженности) и есть движение по Эйлеру. И о том, как преодолевать это расстояние, возникают ли при этом какие-нибудь сложности, в этом определении не говориться ничего. Поэтому придется преобразовать классическое определение движения.

Когда мы говорим о движении точки как субъекта этого процесса, мы всегда имеем в виду изменение (для удобства далее будем говорить о нарастании) протяженности (расстояния) между точкой отсчета и точкой, испытывающей движение. Это классическая точка зрения. Для того, чтобы такое нарастание протяженности можно было описать, оно должно определяться на упорядоченном множестве с заданной на нем мерой (в частности будем использовать меру Лебега). Кроме того, мы должны потребовать выполнения на нем аксиомы Архимеда [19], которую можно сформулировать так:

Аксиома Архимеда. *Для любых чисел a и b таких, что* $0 < a < b$, *существует число n, для которого выполняется неравенство $na > b$.*

Другими словами, какое бы большое число b мы не задали, до него всегда можно добраться путем многократного суммирования минимального интервала a. В этом случае мы имеем дело с нарастающей величиной na.

Смысл этой аксиомы можно также сформулировать следующим образом: «существуют нарастающие величины, способные превзойти любую заданную».

Этим требованиям удовлетворяет линейно упорядоченное множество вещественных чисел **R** (которые является непрерывно упорядоченным архимедовым полем). Его можно представить в виде числовой прямой. Точка, занимающая то или иное положение (позицию) на числовой оси, будет нами рассматриваться как субъект движения.

Чтобы зафиксировать факт движения, нужно путем нескольких (например двух) несовместных измерений определить позицию, которую занимает наша точка. Если результаты не совпадают, следовательно, имеется факт движения точки на расстояние, равное разности позиций, обнаруженной этими измерениями.

Пусть x — позиция точки во время одного измерения, y — во время другого, $x,y \in \mathbf{R}$. Тогда в математическом понимании (т.е. без учета времени в том числе) движение точки по числовой прямой определяется отображением, задаваемым следующей формулой [12]:

$$y = \varphi(x) = \pm x + d,$$

где d — интервал между позициями x и y. Проблема здесь обнаруживается в том, что d — фиксированная величина. В противном случае она не имеет права находиться в определении движения, поскольку порождает порочный круг. Движение оказывается фиксированным сдвигом, и о непрерывном движении говорить не приходится. В таком представлении остается открытым старый вопрос — что такое «нарастающая величина»?

Оставим пока эту проблему в стороне. Рассмотрим интересный пример движения, известный как «эффект домино» (рис.5). На выстроенных в ряд костяшках домино при падении первой из них формируется волна, которая пробегает вдоль всего ряда.

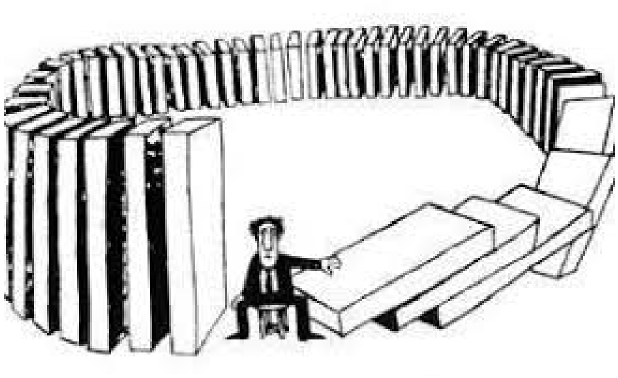


Рис. 5. Эффект домино. Формирование линейного движения при неизменности в ряду позиций элементов (костяшек домино).

По мере последовательного движения волны каждая костяшка меняет свое состояние из «стоящей» на «лежащую», но при этом свою позицию в ряду не меняют. Другими словами, на множестве костяшек домино движение формируется тем, что каждая костяшка поочередно переходит из подмножества «стоящие» в подмножество «лежащие», чем и задается движение. Субъектом движения оказывается граница между этими подмножествами. Здесь движение формируется операцией включения элементов в то или иное подмножество на интервале движения. Этот факт дает шанс вырваться из порочного круга при определении движения. Используя этот пример, сформулируем понятие движения, опираясь на теоретико-множественный подход.

Начнем с конечных и счетных множеств.

Для этого нам придется ввести некоторые определения.

Определение 2.1. Под интервалом нарастания I будем понимать замкнутый интервал (отрезок) линейно упорядоченного множества $I = [a_s,a_f]$, где a_s — стартовый элемент, занимающий начальную (стартовую) позицию, a_f — финишный элемент, занимающий конечную позицию, и который может быть разбит на два подмножества: замкнутое подмножество S (начальное, или стартовое подмножество) и подмножество $F = I \setminus S$ (финишное подмножество), причем $a_s \in S$ и $a_f \in F$, $a_s = \inf S$, $a_f = \sup F$, $I = S \cup F$. А также предикат нарастания $P(x)$, обеспечивающий спонтанное смещение грани (sup S), разделяющей подмножества, в сторону нарастания.

Такое разделение интервала нарастания на два подмножества можно рассматривать как дедекиндово сечение.

Будем обозначать интервал нарастания как $[a_s \xrightarrow{P(x)} a_f]$, или сокращенно: $[a_s \rightarrow a_f]$.

Интервалы нарастания могут быть заданы на любой цепи, которую можно выделить на упорядоченном множестве.

Пусть переменная $x \in I$ пробегает все значения на интервале нарастания I от начального $x = a_s$ до конечного $x = a_f$. Для того, чтобы мы могли задать движение на интервале I, из всех значений переменной $x \in I$ нам необходимо выделить ее текущее значение, непосредственно связанное с фактом движения, т.е. актуальное значение переменной. Обозначим текущее значение нарастающей переменной $x = x\uparrow$.

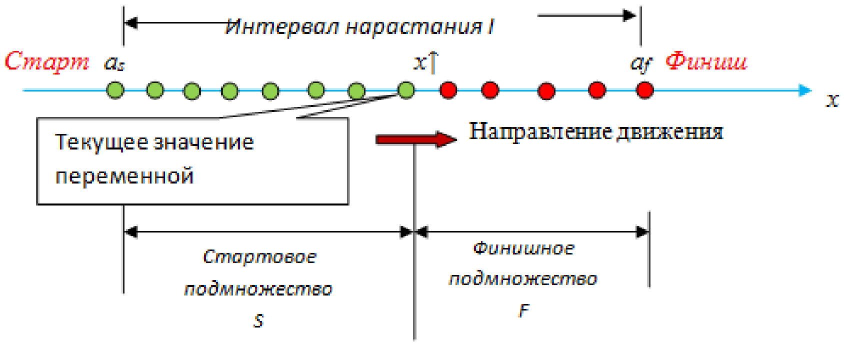


Рис. 6. Интервал нарастания.

Определение 2.2. Текущее значение переменной — это верхняя грань замкнутого подмножества S: $x\uparrow = \sup S$.

Текущее значение $x\uparrow = x \in I$ — это одно из значений переменной, которое локализует точечный субъект движения, природа которого нам безразлична и от нее можно абстрагироваться. С помощью понятия текущего значения можно сформулировать процедуру нарастания.

Теперь нам надо определить механизм нарастания. В рассматриваемом случае он должен быть задан с помощью предиката $P(x)$.

Определение 2.3. Приращение текущего значения задается следующим предикатом $P(x)$: $a_s \in S$, $x_i \in F : x_i = x\uparrow$ если $x_0 = a_s \wedge x_{i-1} \in S \wedge x_{i+1} \in F \rightarrow$ если $x_i = x\uparrow$ то $x_i \in S$.

Тогда формула нарастания примет следующий вид:

$$\forall x_i \in I \,(P(x_i)\colon x_i \in F \rightarrow x_i \in S).$$

Здесь $P(x)$ — это предикат самонарастания, позволяющий абстрагироваться от источников, причин, порождающих движение. Действие предиката выражается в том, что происходит спонтанный последовательный переход элементов подмножества F, примыкающих к подмножеству S, в подмножество S. Это происходит до тех пор, пока S не совпадет со всем множеством I, а подмножество F не исчерпает все свои элементы: $F = \varnothing$.

Работает этот предикат следующим образом. Любой элемент, положение которого оказалось соседним с верхней границей подмножества S и расположенный справа от него элемент принадлежит к подмножеству F, становится элементом подмножества S и принимает на себя статус текущего элемента, пока новый член стартового подмножества не «отодвинет» его от границы и не лишит тем самым его данного статуса.

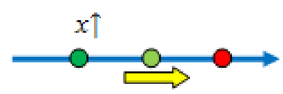


Рис. 7. Действие предиката нарастания.

Локализация таких переходов всегда единственна по длине интервала I, так как верхняя точная грань подмножества S единственна в I.

Стартовая конфигурация содержит $S = \{a_s\}$, $F = I\backslash\{a_s\}$, $x\uparrow = x_0 = a_s$. Поскольку на I в данной конфигурации существует единственный элемент $x = x_1 \in F$, у которого сосед слева принадлежит подмножеству S, а сосед справа — подмножеству F, он поглощается стартовым множеством S. Далее процесс продолжается до тех пор, пока не сложится предфинишная конфигурация: $S = I\backslash\{a_f\}$, $F = \{a_f\}$, $x\uparrow = x_{n-1}$. Последний элемент x_n поглощается подмножеством S в силу того, что он занимает позицию a_f . В результате мы имеем финишную конфигурацию: $S = I$,

$F = \varnothing$. Такая финишная (целевая) конфигурация характеризуется достигнутой конфинальностью множеств S и I — конечный справа элемент a_f для них стал общим.

По сути мы построили схему самонарастающего числа. В принципе, формула нарастания, задающая предикат $P(x)$, может иметь и другой вид, хотя будет сохранять рекурсивный характер.

Если на упорядоченном множестве можно задать предикат нарастания $[a \rightarrow b]$, то нетрудно преобразовать его так, чтобы волна изменений (граница подмножеств S и F) шла в обратном направлении, т.е. $[a \leftarrow b]$. Этим интервалу нарастания присваивается свойство симметричности.

Подчеркнем, что выражения «мгновенно», «быстро», или «медленно» текущее значение $x\uparrow$ под воздействием предиката $P(x)$ пробежит по интервалу нарастания не имеют смысла (в данном контексте), так как понятия «времени» не вводилось в каком-либо виде. Важно лишь то, что заполнение интервала I элементами множества S идет последовательно. И не более того.

Лемма 2.1. Какое бы число ε мы не задали на интервале I, всегда найдется такое текущее значение $x\uparrow$, что интервал $[0, \varepsilon] \subseteq [0, x\uparrow]$:

$$|a_s - x\uparrow| \geq \varepsilon.$$

Другими словами, на интервале нарастания $I = [a_s, a_f]$ справедливо:

$$\forall\, \varepsilon \in I\ \exists x\uparrow \in I\colon |a_s - x\uparrow| \geq \varepsilon.$$

Доказательство следует из построения интервала нарастания и аксиомы Архимеда.

Данная схема движения может действовать на конечных ограниченных множествах, и может быть распространена с некоторой модификацией на бесконечные счетные множества, например, множество натуральных чисел. Т.е. по крайней мере для не более чем счетных множеств применить ее не составит труда.

Теперь мы можем построить определение движения. Для того, чтобы оно было совместимо с традиционным определением движения, мы будем использовать расстояния (меру).

Пусть интересующее нас множество будет размещено на интервале числовой прямой, т.е. будет замкнутым подмножеством множества вещественных чисел. Поскольку конечные точечные множества имеют меру нуль, будем приписывать им протяженность, равную длине интервала, на котором это множество размещено.

Мера интервала нарастания I в таком случае будет равна его длине: $\mu(I) = |a_s - a_f|$. Соответственно для S: $\mu(S) = |a_s - x\uparrow|$, для F: $\mu(F) = |x\uparrow - a_f|$. Для всего интервала в силу конечной аддитивности меры будет выполняться соотношение: $\mu(I) = \mu(S) + \mu(F)$. Теперь можно сформулировать определение движения на множестве.

Под конфигурацией $K(\mu(S),\mu(F))$ понимаем соотношение мер множеств S и F, которое будет меняться в зависимости от положения текущего значения переменной $x\uparrow$.

Пусть дано множество M, на котором могут быть заданы интервалы нарастания.

Определение движения 2.4. Если хотя бы на одном из произвольно заданных интервалов нарастания I на множестве M при двух несовместных измерениях конфигурации $K(\mu(S),\mu(F))$ на интервале I не совпадают хотя бы по одному из множеств S или F, то на данном множестве имеется движение.

Эта формулировка означает, что если на интервале I происходит движение, то расстояние от начальной точки a_s до текущего значения $x\uparrow$ (подмножество S, или пройденный путь — траектория) изменяется, либо изменяется расстояние от текущего значения $x\uparrow$ до целевой позиции (подмножество F, или оставшийся путь).

Данное определение достаточно очевидно, так как последовательный переход элементов из множества F в множество S связан с изменением протяженности интервалов, которые они занимают. Возрастающая под действием предиката $P(x)$ текущая величина $x\uparrow$, являясь верхней границей интервала $S = [a_s,x\uparrow]$, увеличивает и его длину, равную $|a_s - x\uparrow|$, соответственно уменьшая длину интервала F.

Таким образом, движение на множестве M определяется в том и только том случае, если на этом множестве существует хотя бы один интервал нарастания $I \subseteq M$, на котором соответствующая конфигурация K_i, полученная при одном измерении не совпадает с конфигурацией K_j, полученной при ином измерении:

$$K_i(\mu_i(S),\mu_i(F)) \neq K_j(\mu_j(S),\mu_j(F)),\ i \neq j. \tag{2.7}$$

Это выражение можно разделить на два эквивалентных условия:

$$\mu_i(S) \neq \mu_j(S), \text{ или } \mu_i(F) \neq \mu_j(F). \tag{2.8}$$

Теперь мы должны рассмотреть некоторые свойства, характеризующие движение на множествах.

2.6.2. Проходимость множества

Под проходимостью множества мы понимаем возможность попасть из начальной конфигурации в конечную. Начальная конфигурация включает стартовое положение текущего значения: $x\uparrow = a_s$, $S = \{a_s,\}$, $F = I\backslash\{a_s\}$. Конечная конфигурация — это финишная позиция: $x\uparrow = a_f$, $S = I$, $F = \varnothing$.

Вполне возможна ситуация, когда движение не может определяться на всем множестве. В связи с этим возникает естественный вопрос о проходимости самого множества или его подмножеств.

Определение 2.5. Ограниченное множество M будем называть проходимым, если на заданном на этом множестве интервале от произвольно заданной начальной позиции $a_s = \inf M$ до целевой позиции $a_f = \sup M$ будут выполняются критерии проходимости. В противном случае множество является непроходимым.

К критериям проходимости относятся следующие.

1. Интервал $[a_s,a_f] \subseteq M$ является интервалом нарастания (соответственно допускается его сечение на два подмножество S и F).
2. Конфигурация $F = \varnothing$ является достижимой.
3. Конфинальная конфигурация множеств I и S (т.е. конфигурация, при которой $\sup S = \sup I = a_f$) является достижимой. Другими словами, допустима конфигурация, когда множества S и I могут стать конфинальными, т.е. иметь одну и ту же конечную точку, совпадающую с целевой a_f.

Критерии 2 и 3 являются эквивалентными.

Остановимся подробнее на свойствах проходимости множеств.

Определение 2.6. Множество проходимо всюду, если проходимо любое его ограниченное подмножество.

Отсюда следует, что бесконечное множество также будет всюду проходимым, если будет проходимым любой заданный на нем интервал.

С другой стороны, множество, в том числе бесконечное, всюду проходимо, если оно не содержит непроходимых подмножеств.

Если на упорядоченном множестве M конечная конфигурация каждого интервала совпадает с начальной следующего, и каждый из таких интервалов проходим, то определяется цепь, определяющая проходимость всего множества. Если такое множество M бесконечно, то на нем может быть определено непрерывное движение.

Для установления проходимости линейно упорядоченного однородного множества, в частности цепи, достаточно установить проходимость одного из его замкнутых интервалов. В силу однородности множества остальные интервалы будут также проходимы.

С другой стороны, для непроходимости линейно упорядоченного множества достаточно непроходимости хотя бы одного интервала, лежащего на интервале нарастания.

Отсюда следует, что если множество M проходимо, то проходимо любое его подмножество $P \subset M$, размещенное на интервале нарастания в M. Действительно, поскольку M проходимо, значит оно содержит хотя бы одно проходимое подмножество — цепь и на нем отсутствуют непроходимые участки (отрезки цепи).

Необходимо отметить следующие свойства проходимости множества.

1. *Симметричность*. Если упорядоченное множество $[a,b]$ проходимо [a→b], то и множество $[b,a]$ тоже проходимо $[b\to a]$. Другими словами, если множество проходимо в прямом направлении, то оно проходимо и в обратном.
2. *Транзитивность*. Если два подмножества A,B проходимы и их пересечение непусто: $A\cap B \neq \varnothing$ либо $A \cup B$ непрерывно, то проходимо и их объединение.
3. *Рефлексивность*: каждое проходимое множество эквивалентно самому себе.

Нужно подчеркнуть, что в соответствии с определением движения 2.5. открытый интервал (a,b) между точками a и b является непроходимым, так как он не содержит интервал нарастания вида $[a,b]$.

Множество M при $a_s = a_f$ непроходимо. Действительно, если $a_s = a_f = a$, то мы имеем одноэлементное множество $M = \{a\}$, которое не может быть разбито на непустые подмножества (S и F). Таким образом, на нем не может быть сформирован интервал нарастания, и вследствие этого условие проходимости не выполняется.

Определение 2.7. Элемент множества M (в частности точка для точечного множества) α является недостижимым, если на этом множестве невозможно построить проходимый интервал нарастания, конечная точка которого a_f совпадает с α.

Точки недостижимости являются препятствием для проходимости множества. Наличие таких точек на линейно упорядоченном множестве, в частности, делает это множество непроходимым (по крайней мере на подмножествах, которые эти точки содержат). Такие точки полезны для описания препятствий.

2.6.3. Непрерывность движения

Понятие непрерывности движения тесно связано с непрерывностью некоторой кривой — траектории движения. А непрерывность любой линии связана с ее полнотой.

Интуитивное представление о непрерывности заключается в том, что непрерывной является линия, которую «рисует» точка при движении на плоскости или в пространстве. Например, когда мы чертим некоторую линию, не отрывая карандаша от бумаги.

Изначально непрерывную функцию определяли как функцию, которая не может перейти от одного значения к другому, не пройдя через все промежуточные значения. По Эйлеру «…правила исчисления опираются на закон непрерывности, согласно которому кривые линии описываются непрерывным движением точки» [20]. Знаменитой стала эйлерова формулировка непрерывности: «Нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги». Р. Дедекинд отмечал в [21] «…прямой мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, непрерывность».

Сейчас мы имеем более строгие формулировки непрерывности (полноты) упорядоченных множеств. Можно упомянуть формулировки свойства непрерывности: принцип непрерывности по Дедекинду, принцип вложенных отрезков Коши — Кантора, теорема о точной верхней грани. В зависимости от принятого определения вещественного числа, свойство непрерывности может либо постулироваться как аксиома — в той или иной формулировке, либо доказываться в качестве теоремы [22]

Принцип непрерывности по Дедекинду содержит следующее утверждение. Пусть M — произвольное линейно упорядоченное множество. Каковы бы ни были непустые множества $A \subset M$ и $B \subset M$такие что для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \le b$, существует такой элемент $c \in M$, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \le c \le b$ [21].

Заметим, что эта формулировка имеет сходство с аксиомой плотности (бесконечной делимости), которая была приведена выше. Однако выполнение аксиомы плотности является необходимым признаком для непрерывности, но не достаточным. В частности, множество рациональных чисел плотно, но оно не обладает непрерывностью (между рациональными числами находятся иррациональные).

Аксиому Гильберта о непрерывности (полноте линии) можно сформулировать следующим образом: добавление хотя бы одной дополнительной точки в прямую линию вызовет противоречие с другими аксиомами в аксиоматике Гильберта [23]. Другими словами, на непрерывной линии (числовой прямой) не должно быть пустот (отсутствующих точек).

Напомним, что в нашем случае линия не обязательно должна быть прямая. Все утверждения сохраняют силу, если речь идет о какой-либо кривой — например траектории, пройденной точкой во время движения.

Теперь (рассматривая линию как траекторию движения) можно дать определение непрерывному движению.

Под непрерывным движением обычно понимается движение, точечный субъект которого при движении описывает непрерывную линию (траекторию). Т.е. при непрерывном движении текущее значение $x\uparrow$ должно пробежать *все без исключения точки* на интервале нарастания (на множестве вещественных чисел).

Здесь нужно принять во внимание следующую ситуацию. Водитель выезжает из точки A в точку B, но по дороге заезжает в бар (точку C), где задерживается на несколько часов по неизвестным причинам. Сделав этот перерыв, он продолжает свой путь и благополучно приезжает в точку B. Такое движение в общем случае нельзя считать непрерывным (по крайней мере с точки зрения тех, кто с нетерпением ждет водителя в точке B). Однако с геометрической точки зрения движение все-таки будет непрерывным, так как точки A и B можно соединить непрерывной линией — траекторией движения, пройденной в конце концов ленивым водителем. В связи с этим введем понятие континуальности движения.

Определение 2.8. Под континуальным (непрерывным) движением на упорядоченном множестве будем понимать такое движение, когда его подмножества составляют проходимую цепь, представляющую собой непрерывную линию.

Этим определением мы исключаем задержки в движении негеометрического характера (например, временные). Непрерывность движения становится чисто геометрическим понятием. Как правило, говоря о непрерывности движения, мы будем иметь в виду континуальную непрерывность движения, упоминая это свойство в тех случаях, когда его необходимо подчеркнуть.

2.6.4. Новое определение движения

Классическое описание движения практически достаточно удобно, но содержит в себе скрытые противоречия (проблемы пересчета при отсутствии «соседних» элементов и парадоксы движения Зенона). Что делает его математически некорректным. Остановимся на этом подробнее.

Нас в первую очередь будут интересовать апория Зенона «Дихотомия» и его апория с условным названием «Ахиллес и черепаха» [9]. Напомним их содержание. В апории «Дихотомия» утверждается, что для того, чтобы пройти весь путь до какой-либо цели, нужно сначала пройти его половину, а чтобы пройти эту половину, нужно сначала пройти четверть, чтобы пройти эту четверть в свою очередь нужно сначала пройти одну восьмую, и так далее. Следовательно, перед путником лежит бесконечное число отрезков пути, преодолеть которые в силу их бесконечности невозможно. Не стоит и начинать. В апории «Ахиллес и черепаха» быстроногий Ахиллес догоняет медленно ползущую черепаху. Но за время, пока Ахиллес добежит до того места, где находилась черепаха, она уже успеется сдвинуться вперед на какой-то интервал пути. Когда через какое-то время Ахиллес достигнет и этой позиции, черепаха снова успеет сдвинуться вперед, и так до бесконечности. Выходит, Ахиллес никогда не догонит черепаху, и это означает, как следует и из предыдущей апории, что движения не существует вообще.

За 2,5 тысячи лет проблемы движения, обнаруженные гением Зенона, становились предметом пристального внимания выдающихся математиков. «Король математики» Дэвид Гильберт в своей известной монографии [24] отметил следующее: «Обычно этот парадокс (Ахиллес и черепаха — прим. автора) пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и, таким образом, дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже представить (не только физически, но хотя бы в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться. … Подобно тому, как при неограниченном пространственном дроблении вода перестает быть водой, при неограниченном дроблении движения также возникает нечто такое, что едва ли может быть охарактеризовано как движение».

Так что же это «нечто такое», которое не может быть охарактеризовано как движение? Что является причиной того, что классическое представление о движении не совпадает с реальностью?

Другой выдающийся математик, Герман Вейль, так высказался о проблеме движения (в частности, это касается апории «Дихотомия»): «Представим себе вычислительную машину, которая выполняла бы первую операцию за ½ минуты, вторую — за ¼ минуты, третью — за ⅛ минуты и т. д. Такая машина могла бы к концу первой минуты «пересчитать» весь натуральный ряд. Все наши попытки построить эту машину обречены на неудачу. Так почему же тело, вышедшее из точки A, достигает конца отрезка B, «отсчитав» счетное множество точек A_1, A_2,…, A_n,…?» [25].

Действительно, мы в своем движении каким-то образом преодолеваем бесконечность и оказываемся в точке финиша. Как? Общепринятый в настоящее время традиционный взгляд на движение не дает нам ответ на этот вопрос.

Апории Зенона выстроены логически безупречно и демонстрируют внутренние противоречия, содержащиеся в классических представлениях о движении [11]. Движение в окружающем нас мире, к счастью, существует вопреки данным апориям.

Чтобы разобраться в причинах хронических проблем классического представления движения через длины пройденных интервалов (в т.ч. согласно определению 2.5), попробуем взглянуть на процесс движения с другой стороны. Этому поможет пример следующей распространенной бытовой ситуации.

Допустим, в метро нас спросили, как из станции А добраться на станцию Б. Мы можем ответить: «Сойдите через три остановки на четвертой» или «Ваша станция будет через четыре перегона». Это эквивалентные ответы, но в первом случае мы указали пункты, которые нужно проехать, а во втором — интервалы между этими пунктами. Результат одинаков, но описание движения разное.

В одном варианте мы указываем множество точек, которые необходимо преодолеть, во втором — расстояние до цели. Чтобы определить движение через множество пройденных точек, нам нужно опираться на количественную характеристику множества — его мощность.

Другими словами, мы постараемся построить определение движения на основе понятия мощности множеств на интервале нарастания, отказавшись от использующегося в классическом представлении движения меры, т.е. расстояний, длин интервалов, на которых размещены множества.

Будем именовать конфигурацией мощности множеств интервала нарастания выражение $\boldsymbol{H}(|S|,|F|)$ соотношение мощностей множеств S и F, которое будет меняться в зависимости от положения текущего значения переменной $x\uparrow$.

В таком варианте новое определение движения можно сформулировать так.

Пусть дано множество M, на котором могут быть заданы интервалы нарастания.

Определение движения 2.9. Если хотя бы на одном из произвольно заданных интервалов нарастания I на множестве M при двух несовместных измерениях конфигурации $\boldsymbol{H}(|S|,|F|)$ на интервале I не совпадают хотя бы по одному из множеств S или F, то на данном множестве имеется движение.

Данное определение достаточно очевидно, так как переход элементов из множества F в множество S, с которым мы связываем понимание движения, прямо связан с изменением мощности этих интервалов.

Таким образом, движение на множестве M определяется в том и только том случае, если на этом множестве существует хотя бы один интервал нарастания $I \subseteq M,$ на котором соответствующая конфигурация $\boldsymbol{H}_i$, полученная при одном измерении не совпадает с конфигурацией $\boldsymbol{H}_j$, полученной при ином измерении:

$$\boldsymbol{H}_i\,(|S|_i, |F|_i) \neq \boldsymbol{H}_j\,(|S|_j, |F|_j),\ i \neq j. \tag{2.9}$$

Это выражение можно разделить на два эквивалентных условия:

$$|S|_i, \neq |S|_j, \text{ или } |F|_i \neq |F|_j,\ i \neq j. \tag{2.10}$$

Если оба эти условия совместно не выполняются для любого потенциального интервала нарастания на рассматриваемом множестве, можно утверждать, что на нем движение отсутствует.

Сразу отметим важное отличие определение 2.9. от аналогичного определения движения 2.4. в классическом представлении. Понятие мощности множества применимо к любому множеству, тогда как понятие расстояния требует упорядоченности множества. Следовательно, определение 2.9. более общее и применимо к большему классу множеств, чем определение классического движения 2.4.

По определению 2.9. (через мощности множеств) под понятие движения попадают и иные явления на множествах, которые по определению 2.4. этим понятием не охватывались. В частности, пересчет на счетах: палец считающего может не смещаться, тогда как количество костяшек по обе стороны от него может меняться.

Определение 2.9. в принципе не теряет силу, если в качестве интервала нарастания рассматривается бесконечный полуоткрытый интервал: $(\infty, x_f]$ или $[x_s, \infty)$. Это следует из того, что для обнаружения движения на множестве достаточно изменения мощности при несовместных измерениях хотя бы одного из подмножеств S или F.

Для конечных линейно упорядоченных множеств описания движения по обоим определениям будут совпадать, а вот при распространении их на иные, в том числе бесконечные множества описания могут разойтись. И это дает надежду найти проблемную зону, приводящую к парадоксам движения.

(окончание следует)

Литература:

1. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. — М.: Физматлит, 2011.
2. *Колмогоров А.Н.* «Математика» // В кн.: Большая Советская энциклопедия. 2-е изд. Т. 26. — М., 1954.
3. *Юшкевич А.П.* Декарт и математика // Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статьи А. П. Юшкевича. — М.; Л.: Гостехиздат, 1938.
4. *Энгельс Ф.* Диалектика природы. — М.: Госполитиздат, 1948
5. *Декарт Р.* Сочинения в 2 т. — М.: Мысль, 1989.
6. *Юшкевич А.П.* История математики с древнейших времен до начала XIX века. Т. 3. — М.: Наука, 1972. — С. 243.
7. *Кольмен Э.* Бернард Больцано. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
8. *Nikolenko O.D.* The Nature of physical motion and Zeno's paradox. // Physics Essays, **25**, 3, (2012).
9. *Николенко А.Д.* К вопросу о применении парадокса Зенона для изучения природы механического движения. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — Т. 12. — 2012. — № 1. — С. 55-64.
10. *Николенко А.Д., Лебедев Ю.А.* Преждевременные открытия. // Млечный путь. — 2012. — № 3. — С. 226.
11. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? —3-е изд., испр. и доп. — М.:МЦНМО, 2001.
12. *Натонсон И.П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
13. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968.
14. *Галилео Галилей.* Пробирных дел мастер. — М.: Наука, 1987.
15. *Вечтомов Е.М.* Математика: основные математические структуры. — М.: Изд-во Юрайт, 2018.
16. Справочная книга по математической логике / Под ред. Дж. Барвайса. Ч. II. Теория множеств: Пер. с англ. — М.: Наука, 1982.
17. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. — М.: Объединенное научно-техническое издательство, 1937.
18. *Эйлер Л.* Основы динамики точки. / Под ред. В.П. Егоршина. — М.-Л.: Гостехиздат, 1938.
19. Архимед. Архимеда две книги о шаре и цилиндре, измерение круга и леммы. / Перевод с греческого (леммы с латинского) Ф. Петрушевского с примечаниями и пополнениями. — СПб., 1823.
20. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. В 2-х т. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
21. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. — Одесса: Изд-во «Матезис», 1914.
22. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. — 7-е изд. — М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2002.
23. *Гильберт Д.* Основания геометрии. 1948. — М.-Л.: Огиз, 1948.
24. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. — М., 1979.
25. *Даан-Дальмедико А., Пенффер Ж.* Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. — М., 1986.
26. *Френкель А.А., Бар-Хиллел Р.* Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966.
27. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985.

Статья поступила в редакцию 24.01.2019 г.

Nikolenko O.D.

The concept of motion and the inevitability of its quantization

The problems that arise when constructing a time-independent definition of mechanical motion are considered. The key role of the concept of infinity in the understanding of mechanical (and other varieties) of motion is noted. It is shown that only naturally occurring quantization of motion leads to the elimination of motion paradoxes (aporia of Zeno, etc.).

Keywords: concept of motion, set theory, paradoxes of motion, aporia of Zeno, quantization theory, theory of time.