ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

УДК 530.12; 530.16, 535.14, 537, 539.17

Олейник В. П.

ПРОБЛЕМА ДИРАКА. ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Институт высоких технологий
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина
e-mail: valoleinik@gmail.com

Проблема Дирака состоит в том, чтобы ответить на вопросы, каковы причины серьезных трудностей электродинамики и как их устранить. Ключ к решению проблемы дает анализ неполноты электродинамики Максвелла, которая обусловлена, в частности, тем, что электродинамика основана на кулоновском законе взаимодействия между электрическими зарядами. Показано, что действие на исследуемое электромагнитное поле пробного заряда, используемого для проведения процедуры измерения, не является малым возмущением. Учет этого возмущения требует внесения существенных изменений в уравнения движения поля. Получены и исследованы модифицированные уравнения движения электромагнитного поля, учитывающие влияние на это поле пробной частицы. Показано, что модифицированные уравнения поля содержат поправки, появление которых указывает на существование физических эффектов, выпавших из поля зрения электродинамики Максвелла. Так, из модифицированных уравнений следует, что вихревое электрическое поле порождается не только магнитным полем, изменяющимся во времени, но и магнитным полем, изменяющимся в пространстве. Отмечается, что для устранения трудностей электродинамики необходимо установить физическую природу электрического заряда, основываясь на криволинейных движениях классических частиц по инерции.

Ключевые слова: проблема Дирака, неполнота электродинамики Максвелла, электрический заряд, модифицированные уравнения электромагнитного поля, криволинейные движения по инерции.

1. Введение

Как известно [1], технический прогресс человечества определяется в значительной степени уровнем развития электродинамики. Среди представителей физической науки широко распространено мнение, что электродинамика является самой совершенной областью теоретической физики, которая полностью завершена, надежно проверена практикой и дает физическую картину мира, адекватную природе. Однако астрофизические исследования свидетельствуют о том, что современная физика описывает и объясняет лишь малую часть Вселенной. Действительно, согласно результатам исследований по космологии, 72% всего вещества космоса составляет темная энергия неизвестной физической природы, а еще 24% — темная материя, невидимая для средств наблюдения. Так что, несмотря на математическую красоту, логическую стройность и последовательность теоретических построений и другие общепризнанные достоинства современных физических теорий, человечество «видит» лишь малую часть окружающего мира. Такое положение указывает на то, что темпы развития физической науки явно не отвечают стремительно расширяющимся потребностям практики.

Тот факт, что большую часть Вселенной невозможно описать и объяснить на основе существующих ныне физических представлений, означает, что **эти представления из стимула к дальнейшему техническому прогрессу общества превратились в серьезный тормоз развития и поэтому не могут более служить теоретической базой дальнейшего развития цивилизации**.

На необходимость пересмотра устоявшихся представлений физики уже давно обращают внимание многие ученые и мыслители. Так, П.А.М. Дирак, один из создателей квантовой электродинамики — вершины теоретической физики XX века, анализируя в 60-х годах прошлого века трудности электродинамики, писал: «**Правильный вывод состоит в том, что основные уравнения неверны. Их нужно очень существенно изменить, с тем, чтобы в теории вообще не возникали бесконечности и чтобы уравнения решались точно, по обычным правилам, без всяких трудностей. Это условие потребует каких-то очень серьезных изменений: небольшие изменения ничего не дадут …**» [2] (с.197). По словам Дирака, трудности теории, «**ввиду их глубокого характера, могут быть устранены лишь радикальным изменением основ теории, вероятно, столь же радикальным, как и переход от теории боровских орбит к современной квантовой механике**» [3] (с.403).

Суть проблемы, сформулированной Дираком, такова: установить причины серьезных трудностей электродинамики и найти способы их устранения. Для решения проблемы Дирака необходимо провести глубокий критический анализ физических принципов, лежащих в основе современной физики. Речь идет о фундаментальных физических законах и принципах, которые кажутся ныне надежно установленными и проверенными практикой, но, возможно, на самом деле содержат серьезные недостатки, устранение которых потребует радикальных изменений в общепринятых физических представлениях. Следует подчеркнуть, что задача заключается не только в том, чтобы выявить трудности общепринятых теорий, но и в том, чтобы раскрыть физическую сущность явлений и процессов, приводящих к появлению этих трудностей [4].

Как видно из результатов работ [5-12], ключ к решению проблемы Дирака дает исследование неполноты классической механики Ньютона и электродинамики Максвелла. Неполнота механики заключается в том, что из поля зрения механики выпадает огромный класс движений — криволинейные (ускоренные) движения по инерции. Неполнота же электродинамики обусловлена, в частности, тем, что электродинамика основана на кулоновском законе взаимодействия между электрическими зарядами, который имеет феноменологический характер и описывает весьма частный случай взаимодействия между частицами. Согласно результатам исследований [8,10,11], вид закона действия силы между классическими частицами определяется многими факторами. Он существенно зависит от состояния относительного движения частиц, от состояния движения центра масс двухчастичной системы, а также от процессов перекачки энергии из одних степеней свободы системы в другие.

В настоящей работе рассмотрены особенности уравнений электромагнитного поля, порождаемого классической заряженной точечной частицей. Показано, что напряженности электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла, невозможно измерить на опыте. Ввиду исключительной важности этого результата, обсудим его более подробно.

Чтобы исследовать электромагнитное поле экспериментально, необходимо располагать измерительным прибором, способным взаимодействовать с этим полем. В качестве простейшего измерительного прибора можно использовать заряженную пробную частицу (обозначим ее заряд через q_1). Измеряя силу взаимодействия пробного заряда q_1 с интересующим нас полем в различных точках пространства, можно в принципе определить напряженности исследуемого поля. Следует, однако, учесть, что при проведении процедуры измерения измерительный прибор (пробная частица) может изменить исследуемое поле. Обычно предполагается, что воздействие пробной частицы на исследуемую физическую систему столь мало, что им можно пренебречь.

Исследование показывает, что в рассматриваемом случае указанное условие не выполняется. Это обусловлено тем, что уравнения Максвелла описывают электромагнитное поле, порождаемое точечным электрическим зарядом (его величину обозначим через q_0), который, по предположению, взаимодействует с окружающими частицами по закону Кулона. Пробный заряд q_1, внесенный в точку наблюдения поля, действует на исходный заряд q_0 с силой, величина которой равна силе, с которой исходный заряд q_0 действует на пробный заряд. Следовательно, действие пробного заряда на рассматриваемую систему не является ее малым возмущением. Очевидно, что для корректного описания возникшей физической ситуации необходимо перейти от одночастичной задачи, которая рассматривалась при получении уравнений Максвелла, к задаче двух заряженных частиц, участвующих в формировании электромагнитного поля.

В работе получены и исследованы уравнения движения электромагнитного поля, учитывающие влияние на это поле пробной частицы. Из полученных результатов видно, что возмущение, связанное с действием пробной частицы, не только искажает исследуемое поле, но и требует внесения существенных изменений в уравнения, управляющие движением электромагнитного поля.

Полученные результаты подробно изложены в следующем разделе.

С физической точки зрения, различие между уравнениями Максвелла и модифицированными уравнениями поля обусловлено тем, что первые описывают электромагнитное поле в рамках задачи одной частицы, не учитывая влияние на поле пробного заряда (измерительного прибора), а вторые получены из рассмотрения двухчастичной задачи, в которой исходный заряд, порождающий исследуемое поле, и пробный заряд учитываются на равных основаниях.

С формально-математической точки зрения, различие между обсуждаемыми в работе подходами к описанию электромагнитного поля состоит в том, что в одном из них радиус-вектор $\vec{r}$ точки наблюдения поля и момент t времени наблюдения считаются независимыми переменными и поэтому развитие поля во времени описывается коммутатором $[\partial/\partial t, \vec{\nabla}_{\vec{r}}] = 0$, а во втором — указанные выше переменные, из-за учета влияния пробной частицы на поле, перестают быть независимыми величинами и поэтому для описания временной динамики поля используется коммутатор $[d/dt, \vec{\nabla}_{\vec{r}}] \neq 0$, вид которого определяется траекторией движения пробной частицы (выше $\partial/\partial t$ и d/dt — частная и полная производные по времени, $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ – оператор набла).

В Заключении сформулированы основные выводы работы.

2. Уравнения движения электромагнитного поля, порождаемого точечным зарядом. Пробный заряд и уравнения движения поля

Чтобы выявить физические особенности электромагнитного поля, порождаемого точечным электрическим зарядом, а также уяснить, как влияет пробный заряд на исследуемое поле, и понять, каким способом можно учесть это влияние в уравнениях движения, нам потребуется неоднократно обращаться к уравнениям Максвелла. Поэтому анализу принципиальных вопросов электродинамики мы предпошлем краткий вывод уравнений Максвелла.

Как известно [13,14], уравнения Максвелла для электромагнитного поля, порождаемого классической заряженной частицей, можно получить, исходя из следующих гипотез:

1. существует физическая характеристика классической частицы, называемая электрическим зарядом; заряд служит источником (генератором) электрического поля и подчиняется закону сохранения;
2. две классические заряженные частицы взаимодействуют между собой по закону Кулона;
3. электромагнитное поле подчиняется принципу суперпозиции;
4. справедлива специальная теория относительности (СТО).

Приступим к выводу уравнений движения. Рассмотрим классическую точечную частицу, обладающую электрическим зарядом q_0 и движущуюся по траектории в некоторой инерциальной системе отсчета (ИСО) S. Положение частицы на траектории в момент времени t описывается радиус-вектором $\vec{r}_0$, $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$, проведенным из начала координат в системе отсчета S в точку нахождения частицы.

Согласно общепринятым представлениям, указанная частица создает в окружающем пространстве электрическое (кулоновское) поле, потенциал ϕ и напряженность $\vec{E}$ которого в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ (назовем ее **точкой наблюдения поля**; это точка, в которую вносится пробный заряд, используемый для определения величины напряженности поля, создаваемого исходной частицей) даются формулами:

$$\phi = kq_0 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \equiv \phi(\vec{r}), \quad \vec{E} = kq_0 \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \equiv \vec{E}(\vec{r}), \quad k = const, \quad \vec{r} \neq \vec{r}_0. \tag{1}$$

В точке $\vec{r} = \vec{r}_0$ функция $\phi(\vec{r})$ обращается в бесконечность и является недифференцируемой.

Область применимости кулоновского закона (1) принято расширять, дополнив ее точкой $\vec{r}=\vec{r}_0$, с помощью равенства (см. [15], с.120)

$$\vec{\nabla}^2(1/|\vec{r}-\vec{r}_0|)=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_0), \qquad (2)$$

где $\vec{\nabla}\equiv\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ — оператор набла, $\delta(\vec{r})$ — $\delta-$функция Дирака. Это равенство, которое можно записать как

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r})=-4\pi k\rho(\vec{r},t), \quad \rho(\vec{r},t)=q_0\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)), \qquad (2a)$$

содержит в себе правило дифференцирования функций $\phi(\vec{r})$ и $\vec{E}(\vec{r})$ (1) в окрестности точки $\vec{r}=\vec{r}_0$. Напряженность $\vec{E}$ и потенциал ϕ связаны между собой соотношением:

$$\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \qquad (3)$$

Действуя оператором $\vec{\nabla}$ на обе части равенства (3) и используя первое из равенств (2а), получаем следующее выражение для дивергенции напряженности поля $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla}\vec{E}=4\pi k\rho(\vec{r},t). \qquad (4)$$

Последнее равенство используется в качестве определения плотности ρ электрического заряда частицы в момент времени t в точке $\vec{r}$: $\rho=\rho(\vec{r},t)$. Согласно (4), плотность заряда выражается через напряженность кулоновского поля, создаваемого частицей, являясь источником или стоком этого поля. Согласно (2а), плотность заряда $\rho(\vec{r},t)$ оказывается отличной от нуля лишь в точке $\vec{r}=\vec{r}_0$, которая лежит вне области определения потенциала и напряженности поля (см. (1)). Как видно из изложенного, равенство (4), входящее в систему уравнений Максвелла, является следствием закона Кулона (1) при условии, что область применимости последнего дополнена точкой $\vec{r}=\vec{r}_0$ с помощью соотношения (2).

Следует подчеркнуть, что радиус-вектор $\vec{r}$, входящий в формулы (1) — (4), определяет положение точки наблюдения поля, порождаемого частицей. Помещая в эту точку пробный электрический заряд (обозначим его величину через q_1) и перемещая пробный заряд вдоль некоторой траектории, $\vec{r}=\vec{r}(t)$, можно измерить величину силы $\vec{F}$, действующей на пробный заряд в некоторый момент времени, $\vec{F}=q_1\vec{E}$, и тем самым определить напряженность поля $\vec{E}$ в точке пространства, в которой располагается пробная частица. В нерелятивистской теории не учитывается запаздывание при передаче сигнала из одной точки в другую, и поэтому моменты времени, определяющие положение пробной частицы и частицы, порождающей поле, должны быть одинаковыми. Заметим, что если скорости частиц малы по сравнению со скоростью света c ($|\vec{v}|=|\dot{\vec{r}}|<<c,\ \ |\vec{v}_0|=|\dot{\vec{r}}_0|<<c$), то эффекты запаздывания, согласно специальной теории относительности (СТО), являются эффектами второго порядка малости ($\sim(v/c)^2,(v_0/c)^2$). Как видно из приведенных рассуждений, величина $\vec{r}-\vec{r}_0$, входящая в соотношения (1), имеет следующий смысл:

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{r}(t)-\vec{r}_0(t)\equiv\vec{R}(t), \qquad (5)$$

т.е. временная переменная t, определяющая положение точки наблюдения, совпадает с временной переменной, определяющей положение частицы, создающей поле. Существенно, что это утверждение оказывается справедливым с точностью до величин порядка v/c и v_0/c. Рассмотренные выше функции $\phi=\phi(\vec{r},t)$, $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\rho=\rho(\vec{r},t)$ являются, таким образом, сложными функциями времени вида $f=f(\vec{R}(t))$.

Рассмотрим простейший случай, когда пробный заряд, необходимый для проведения процедуры измерения, отсутствует. В этом случае точку наблюдения поля можно считать неподвижной в исходной ИСО S, т.е. можно полагать, что $d\vec{r}/dt=0$. Вследствие этого, величины $\phi=\phi(\vec{r},t)$, $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\rho=\rho(\vec{r},t)$ можно рассматривать как функции независимых динамических переменных $\vec{r}$ и t. Вычисляя частную производную по времени от обеих частей равенства (4), после простых преобразований получаем соотношение:

$$\vec{\nabla}\left(\varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t+\vec{j}\right)=0, \tag{6}$$

где $\varepsilon_0=(4\pi k)^{-1}$, $\vec{j}=\vec{j}(\vec{r},t)=\vec{v}_0(t)\rho(\vec{r},t)$ — вектор плотности электрического тока частицы, $\vec{v}_0(t)$ — скорость частицы в момент времени t, определяемая из равенства (см. (5)): $d\vec{R}/d\,t=-d\vec{r}_0/dt\equiv-\vec{v}_0(t)$. При получении равенства (6) использовано уравнение непрерывности (см. [15]):

$$\partial\rho/\partial t+\vec{\nabla}\vec{j}=0\,. \tag{7}$$

Из равенства (6) следует, что вектор $\varepsilon_0\partial\vec{E}\,/\,\partial t+\vec{j}$ можно представить в следующей форме:

$$\varepsilon_0\partial\vec{E}\,/\,\partial t+\vec{j}=\vec{a}+[\vec{\nabla}\vec{H}], \tag{8}$$

где $\vec{a}=const,\ \vec{H}=\vec{H}(\vec{r},t)$ – некоторое векторное поле, которое будем называть напряженностью магнитного поля.

Для определения постоянной $\vec{a}$ в равенстве (8) обратимся к электромагнитному полю, создаваемому электрически заряженной частицей, движущейся с постоянной скоростью в некоторой ИСО. Рассмотрим движущиеся друг относительно друга ИСО S и S'; с каждой из них свяжем декартовы координаты с осями координат, ориентированными так, что ось z' совпадает с осью z, а оси x' и y' параллельны, соответственно, осям x и y. Полагаем, что система отсчета S' движется относительно системы отсчета S вдоль оси z со скоростью $\vec{v}_0=const$. Пусть в начале координат системы отсчета S' покоится частица с зарядом q, создающая в окружающем пространстве статическое поле, напряженности которого в точке наблюдения поля $\vec{r}'=(x',y',z')$ определяются формулами: $\vec{E}'=kq\,\vec{r}'/\left|\vec{r}'\right|^3\equiv\vec{E}'(\vec{r}'),\quad \vec{H}'=0$. Если $\vec{r}_0=(0,0,v_0t)$ и $\vec{r}=(x,y,z)$ – радиус-векторы точки, в которой находится заряженная частица, и точки наблюдения поля, создаваемого частицей, в системе отсчета S, то, как известно [13,14], напряженности поля, создаваемого частицей в системе отсчета S, даются формулами:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{1}{r'^3}(x,y,z-v_0t),\quad \vec{H}(\vec{r},t)=\varepsilon_0[\vec{v}_0\vec{E}(\vec{r},t)], \tag{9}$$

где $\gamma=\left(1-v_0^2/c^2\right)^{-1/2}$, $\quad r'=(x^2+y^2+\gamma^2(z-v_0t)^2)^{1/2}$, $\quad \vec{B}=\mu_0\vec{H}$, $\quad \mu_0=1/(\varepsilon_0c^2)$, c – скорость света в вакууме. Нетрудно убедиться в том, что напряженности поля (9) связаны между собой соотношением: $\varepsilon_0\partial\vec{E}\,/\,\partial t=[\vec{\nabla}\vec{H}]$, где частная производная по времени определяется при $\vec{r}=const$. Сравнивая это соотношение с (8) и принимая во внимание, что $\vec{j}=0$ при $\vec{r}\neq\vec{r}_0$, получаем: $\vec{a}=0$. Так мы приходим к системе уравнений (4) и (8), которые можно записать в виде:

$$\varepsilon_0\partial\vec{E}\,/\,\partial t+\vec{j}=[\vec{\nabla}\vec{H}],\quad \vec{\nabla}\vec{E}=\rho\,/\,\varepsilon_0. \tag{10}$$

Приведенная выше система уравнений представляет собой вторую пару уравнений Максвелла.

Первую пару уравнений Максвелла можно получить, исходя из уравнений (10) и требования, чтобы уравнения электромагнитного поля удовлетворяли принципу относительности [13]. Первая пара уравнений Максвелла, которую можно представить в виде

$$[\vec{\nabla}\vec{E}]=-\partial\vec{B}\,/\,\partial t,\quad \vec{\nabla}\vec{B}=0, \tag{11}$$

где $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$, описывает закон электромагнитной индукции и определяет магнитное поле как поле вихревое. Общепринята следующая интерпретация уравнений Максвелла: они описывают поведение электромагнитного поля $\vec{E},\vec{H}$, которое порождается заряженными частицами, характеризуемыми плотностями заряда и тока ρ и $\vec{j}$. Выше уравнения Максвелла получены в предположении, что величины ρ и $\vec{j}$ относятся к заряженной классической точечной частице.

Если на обе части первого из уравнений (10) подействовать слева оператором $\varepsilon_0^{-1}\vec{\nabla}$, а на обе части второго — оператором $\partial/\partial t$ и затем из второго равенства вычесть почленно первое, то получим соотношение:

$$[\partial/\partial t, \vec{\nabla}]\vec{E} = \varepsilon_0^{-1}(\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla}\vec{j}) = 0\,,$$

где использовано уравнение непрерывности (7). Из последнего равенства видно, что операторы $\partial/\partial t$ и $\vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}}$ коммутируют между собой:

$$[\partial/\partial t, \vec{\nabla}] = 0\,. \qquad (12)$$

Условие коммутации (12) означает, что величины $\vec{r}$ и t являются независимыми динамическими переменными. Это условие было использовано нами при выводе из теоремы Гаусса (4) первого из равенств (10). Следовательно, условие (12) можно рассматривать как условие внутренней непротиворечивости уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Отметим, что независимость динамических переменных $\vec{r}$ и t существенно используется и при получении уравнения непрерывности (7) (см. [15], с. 99).

Приведенный выше вывод уравнений Максвелла подтверждает, что Максвелловская схема электродинамики основывается на предположениях, указанных в начале данного раздела. Цель изложенного выше состоит, однако, не в подтверждении хорошо известных результатов, а в том, чтобы подготовить основу для формулировки качественно нового результата, выпавшего из поля зрения предыдущих исследователей, результата, позволяющего по-новому взглянуть на проблему Дирака и разглядеть истинную причину, по которой основные уравнения электродинамики неверны.

Как будет видно из дальнейшего, существует принципиальное ограничение на область применимости уравнений Максвелла: последние справедливы лишь при условии, что в точке наблюдения поля отсутствует пробная частица, способная регистрировать электромагнитное поле. В то же время, внесение пробной частицы в исследуемую систему столь сильно искажает состояние системы, что эти искажения невозможно описать с помощью уравнений Максвелла — последние требуют существенной модификации.

Пусть теперь в точку наблюдения поля с радиус-вектором $\vec{r}$ ($\vec{r} \neq \vec{r}_0$) внесена пробная частица, обладающая зарядом q_1. На пробную частицу действует сила $\vec{F}(\vec{r})$, $\vec{F}(\vec{r}) = q_1\vec{E}(\vec{r})$. Используя выражение (1), приходим к закону Кулона:

$$\vec{F} = kq_1q_0\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\,. \qquad (13)$$

Очевидно, что на исходную частицу с зарядом q_0 действует со стороны пробной частицы сила $\vec{F}_1$, $\vec{F}_1 = kq_1q_0\dfrac{\vec{r}_0-\vec{r}}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3} = -\vec{F}$. Следовательно, пробная частица с зарядом q_1, помещенная в точке наблюдения $\vec{r}$, создает в окружающем пространстве электрическое поле, напряженность которого в точке нахождения исходной частицы составляет: $\vec{F}_1/q_0 = kq_1\dfrac{\vec{r}_0-\vec{r}}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3} \equiv \vec{E}_1$. Обозначим через m_0 и m_1 массу исходной и пробной частиц. Движение частиц управляется уравнениями динамики:

$$m_1\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \quad m_0\ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}_1 = -\vec{F}. \qquad (14)$$

Как видно из (14), пробная и исходная частицы, связанные между собой кулоновским взаимодействием, движутся с ускорениями

$$\vec{a}_1 \equiv \ddot{\vec{r}} = \vec{F}/m_1 \text{ и } \vec{a}_0 \equiv \ddot{\vec{r}}_0 = -\vec{F}/m_0\,, \qquad (15)$$

соответственно. Согласно (15), ускорения частиц связаны между собой соотношением: $\vec{a}_1 = -(m_0/m_1)\vec{a}_0$. Значит, рассматриваемые частицы движутся по траекториям, и положение частиц на траекториях описывается радиус-векторами $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$, которые определяют ускорение частиц в соответствии с равенствами (15). Существенно, что обе частицы не могут ни покоиться, ни пребывать в состоянии равномерного и прямолинейного движения [12] (в силу того, что частицы подчиняются закону Кулона и одновременно управляются уравнениями движения).

Таким образом, если в точке наблюдения поля, порождаемого исходной частицей, находится пробный заряд, условие $d\vec{r}\,/\,dt = 0$ не выполняется. Это значит, что переменные $\vec{r}$ и t, играющие роль аргументов функций $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\rho = \rho(\vec{r}, t)$, перестают быть независимыми. Указанные функции становятся сложными функциями времени вида $f = f(\vec{R}(t))$, где величина $\vec{R}(t)$ дается формулой (5) и $d\vec{r}\,/\,dt \neq 0$. Это приводит к тому, что частные производные по времени $\partial\vec{E}\,/\,\partial t$ и $\partial\rho\,/\,\partial t$ теряют смысл. Вместо частных производных нужно рассматривать полные производные по времени. Следовательно, уравнения движения электромагнитного поля существенно изменяются по сравнению с уравнениями Максвелла.

Прежде чем перейти к выводу модифицированных уравнений электромагнитного поля, учитывающих нахождение пробного заряда в точке наблюдения поля, переопределим основные величины $\phi, \vec{E}$ и ρ, характеризующие поведение электромагнитного поля, заменив их регуляризованными величинами. Это вызвано тем, что функции $\phi = \phi(\vec{r})$ и $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ (1) не дифференцируемы в точке $\vec{r} = \vec{r}_0$, хотя плотность заряда $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ (2a) отлична от нуля именно в этой точке. Регуляризованные величины имеют вид:

$$\tilde{\phi}(\vec{r}) = kq_0 \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + \varepsilon^2}}, \quad \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\tilde{\phi}(\vec{r}) = kq_0 \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\left((\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + \varepsilon^2\right)^{3/2}}. \qquad (1a)$$

Функции $\tilde{\phi}(\vec{r})$ и $\tilde{\vec{E}}(\vec{r})$ определены и дифференцируемы во всей области переменной $\vec{r}$, принимают конечное значение при $\vec{r} = \vec{r}_0$: $\tilde{\phi}(\vec{r}_0) = kq_0\,/\,\varepsilon$, $\tilde{\vec{E}}(\vec{r}_0) = 0$, и переходят в $\phi(\vec{r})$ и $\vec{E}(\vec{r})$ при $\varepsilon \to 0$. Указанный выше предельный переход может быть совершен в самом конце вычислений.

Далее, полагая $\vec{R}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0(t) \equiv \vec{R}$ (см. (5)) и вводя обозначение $\tilde{\vec{E}}(\vec{R}) = kq_0 \frac{\vec{R}}{\left(\vec{R}^2 + \varepsilon^2\right)^{3/2}}$, вычисляем регуляризованную плотность электрического заряда:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}}\tilde{\vec{E}}(\vec{R}) = 4\pi k\tilde{\rho}(\vec{R}(t)), \quad \tilde{\rho}(\vec{R}) = q_0 \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon^2}{\left(\vec{R}^2 + \varepsilon^2\right)^{5/2}} \equiv q_0\delta_\varepsilon(\vec{R}). \qquad (4a)$$

Отметим, что $\delta_\varepsilon(\vec{R}) \to \delta(\vec{R})$ при $\varepsilon \to 0$. Функция $\delta_\varepsilon(\vec{R})$ удовлетворяет условию нормировки: $\int \delta_\varepsilon(\vec{R})dV = 1$, где интегрирование идет по объему всего пространства. Последнюю формулу легко проверить, используя табличные интегралы (см. [16], с.310, 3.252(7)):

$$I_n(\varepsilon^2) = \int_0^\infty \frac{dR}{(R^2 + \varepsilon^2)^n}, \quad I_{3/2}(\varepsilon^2) = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad I_{5/2}(\varepsilon^2) = -\frac{2}{3}\frac{d}{d(\varepsilon^2)} I_{3/2}(\varepsilon^2) = \frac{2}{3}\frac{1}{\varepsilon^4}.$$

Следует подчеркнуть, что регуляризованная плотность заряда $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\vec{R})$ (4a) при $\varepsilon \neq 0$ отлична от нуля во всей области значений $\vec{R}$, причем $\rho(\vec{R}) = \tilde{\rho}(\vec{R})$ при $\varepsilon \to 0$. Использование функций $\tilde{\phi}(\vec{r})$, $\tilde{\vec{E}}(\vec{r})$ и $\tilde{\rho}(\vec{R})$ в качестве потенциала, напряженности и плотности заряда с переходом к пределу $\varepsilon \to 0$ в самом конце вычислений позволяет в ходе расчетов освободиться от недифференцируемых функций и избежать необходимости расширения области применимости закона Кулона.

Перейдем к выводу уравнений, описывающих поведение электромагнитного поля при учете пробного заряда, внесенного в точку наблюдения поля. Уравнения движения (14) рассматриваемой нами двухчастичной системы эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\mu\ddot{\vec{R}} = \tilde{\vec{F}}(\vec{R}), \quad M\ddot{\vec{R}}_C = 0, \quad \tilde{\vec{F}}(\vec{R}) = kq_1q_0\frac{\vec{R}}{(\vec{R}^2+\varepsilon^2)^{3/2}}, \tag{16}$$

где радиус-векторы $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{R}_C = \dfrac{m_1\vec{r} + m_0\vec{r}_0}{m_1 + m_0}$ описывают, соответственно, относительное движение и движение центра масс системы двух частиц; $\mu = m_1m_0 / M$ и $M = m_1 + m_0$ — приведенная и полная масса системы; величина $\tilde{\vec{F}}(\vec{R})$ представляет собой регуляризованное выражение силы, действующей на пробный заряд. Согласно второму из равенств (16), центр масс движется с постоянной скоростью, равной $\dot{\vec{R}}_C \equiv \vec{V}_C$, $\vec{V}_C = (m_1\vec{v} + m_0\vec{v}_0)/M$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$.

Поскольку величина $\tilde{\vec{F}}(\vec{R})/q_1 \equiv \tilde{\vec{E}}(\vec{R})$ является регуляризованной напряженностью поля в точке нахождения пробного заряда и выполняется равенство $\vec{\nabla}_{\vec{r}} = \vec{\nabla}_{\vec{R}}$, то регуляризованную плотность заряда $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\vec{R})$ можно определить по формулам (4а). Дифференцируя по времени обе части первого из равенств (4а) (принимаем во внимание, что $\vec{r} = \vec{r}(t)$, и поэтому вычисляем полную производную по времени), получаем:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\tilde{\vec{E}}) - \vec{\nabla}_{\vec{R}}\frac{d}{dt}\tilde{\vec{E}} + \vec{\nabla}_{\vec{R}}\frac{d}{dt}\tilde{\vec{E}} = 4\pi k\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(\vec{R}).$$

Сумму первых двух слагаемых, стоящих в левой части последнего равенства, можно записать в виде коммутатора операторов d/dt и $\vec{\nabla}_{\vec{R}}$, действующего на напряженность поля: $[d/dt, \vec{\nabla}_{\vec{R}}]\tilde{\vec{E}}$. Поэтому указанное равенство можно представить в виде:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}}(d\tilde{\vec{E}}/dt) - 4\pi k\, d\tilde{\rho}(\vec{R})/dt + [d/dt, \vec{\nabla}_{\vec{R}}]\tilde{\vec{E}} = 0. \tag{17}$$

Заметим, что если бы переменные R_α и t были независимыми, то операторы $\partial/\partial t$ и $\vec{\nabla}_{\vec{R}}$ коммутировали бы между собой. В рассматриваемом здесь случае величины ρ, $\vec{E}$ не зависят явно от t; эти величины зависят от t только через $\vec{R}$.

Учитывая формулы

$$\frac{d}{dt} = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial R_\alpha}\frac{dR_\alpha}{dt} = \sum_\alpha V_\alpha\frac{\partial}{\partial R_\alpha}, \quad V_\alpha = \frac{dR_\alpha}{dt}, \quad \vec{\nabla}_{\vec{R}} = \sum_\beta \vec{e}_\beta\frac{\partial}{\partial R_\beta}, \quad \tilde{\vec{E}} = \sum_\beta \vec{e}_\beta\tilde{E}_\beta, \tag{18}$$

где $\vec{e}_\beta$ — орты декартовой системы координат, которые считаем фиксированными (не изменяющимися во времени), вычислим величину $d\tilde{\rho}(\vec{R})/dt$ и последнее слагаемое, стоящее в левой части равенства (17). Обозначим через $\tilde{V}_\alpha(\vec{R})$ величину $V_\alpha(t)$, преобразованную к переменной $\vec{R} = \vec{R}(t)$ таким образом, чтобы выполнялось тождество: $\tilde{V}_\alpha(\vec{R}(t)) \equiv V_\alpha(t)$. Получаем:

$$\begin{gathered}\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \sum_{\alpha=x,y,z}\tilde{V}_\alpha(\vec{R})\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial R_\alpha} = \vec{\nabla}_{\vec{R}}(\tilde{\vec{V}}\tilde{\rho}) - \tilde{\rho}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\tilde{\vec{V}}),\\ [d/dt, \vec{\nabla}_{\vec{R}}] = -\sum_{\alpha,\beta}\vec{e}_\beta\frac{\partial\tilde{V}_\alpha}{\partial R_\beta}\frac{\partial}{\partial R_\alpha}, \quad [d/dt, \vec{\nabla}_{\vec{R}}]\tilde{\vec{E}} = -\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial\tilde{V}_\alpha}{\partial R_\beta}\frac{\partial\tilde{E}_\beta}{\partial R_\alpha} = -\sum_\beta\left(\frac{\partial(\tilde{\vec{V}}\vec{\nabla}_{\vec{R}})}{\partial R_\beta}\right)\tilde{E}_\beta.\end{gathered} \tag{19}$$

Отметим, что если $\vec{r}$ и t — независимые динамические переменные, то оператор $\vec{\nabla}_{\vec{R}}$ и производную по времени d/dt можно заменить, соответственно, на оператор $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \equiv \vec{\nabla}$ и частную производную $\partial/\partial t$, и тогда первое из равенств (19) превратится в обычное уравнение непрерывности: $\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla}(\vec{v}_0\rho) = 0$.

В правой части последней из формул (19) выделим слагаемое, имеющее вид дивергенции:

$$[d/dt,\vec{\nabla}_{\vec{R}}]\vec{\tilde{E}} = -\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial}{\partial R_\alpha}\left(\tilde{E}_\beta\frac{\partial\tilde{V}_\alpha}{\partial R_\beta}\right)+\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial}{\partial R_\beta}\left(\tilde{E}_\beta\frac{\partial\tilde{V}_\alpha}{\partial R_\alpha}\right)-\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial\tilde{E}_\beta}{\partial R_\beta}\frac{\partial\tilde{V}_\alpha}{\partial R_\alpha} = \tag{20}$$
$$= -\vec{\nabla}_{\vec{R}}\left((\vec{\tilde{E}}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{\tilde{V}}-\vec{\tilde{E}}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}})\right)-(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{E}})(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}}).$$

Теперь формула (17) преобразуется к виду:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}}\left(d\vec{\tilde{E}}\big/dt-\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial R_\alpha}(\tilde{E}_\alpha\vec{\tilde{V}})+\vec{\tilde{E}}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}})\right)=0. \tag{21}$$

Значит, получаем следующую систему уравнений:

$$d\vec{\tilde{E}}\big/dt-\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial R_\alpha}(\tilde{E}_\alpha\vec{\tilde{V}})+\vec{\tilde{E}}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}}) = c_1[\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{H}],\quad \vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{E}} = 4\pi k\tilde{\rho}(\vec{R}). \tag{22}$$

Здесь $\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial R_\alpha}(\tilde{E}_\alpha\vec{\tilde{V}}) = 4\pi k\vec{\tilde{V}}\tilde{\rho}(\vec{R})+(\vec{\tilde{E}}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{\tilde{V}},\quad c_1 = const,\quad 4\pi k = 1/\varepsilon_0$. С помощью последних равенств первое из уравнений (22) можно записать в виде (ср. с (10)):

$$\varepsilon_0 d\vec{\tilde{E}}\big/dt-\vec{j}-\varepsilon_0(\vec{\tilde{E}}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{\tilde{V}}+\varepsilon_0\vec{\tilde{E}}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}}) = [\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{H}],\quad \vec{j} = \vec{\tilde{V}}\tilde{\rho}(\vec{R}),\quad \vec{V} = \vec{v}-\vec{v}_0,\quad c_1\varepsilon_0 = 1. \tag{23}$$

Постоянная c_1 определена из естественного условия, чтобы при $d\vec{r}/dt = 0$ уравнение (23) совпадало с первым из уравнений, входящих во вторую пару уравнений Максвелла (10) (в пределе $\varepsilon \to +0$). Различие между (10) и (23) состоит в том, что в (23) входит полная производная по времени и в левой части появляется дополнительный член $-\varepsilon_0(\vec{\tilde{E}}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{\tilde{V}}+\varepsilon_0\vec{\tilde{E}}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}}) = -\Delta\vec{j}$, который представляет собой поправку к току смещения $\varepsilon_0 d\vec{\tilde{E}}\big/dt$. Кроме того, вместо уравнения непрерывности (7) появляется соотношение, которое можно записать в виде (см.(19)):

$$\left(d/dt-(\vec{\tilde{V}}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\right)\tilde{\rho} = d\tilde{\rho}/dt-\vec{\nabla}_{\vec{R}}(\vec{\tilde{V}}\tilde{\rho})+\tilde{\rho}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}}) = 0. \tag{24}$$

Последнее равенство является тождеством и выполняется для произвольной сложной функции времени вида $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\vec{R}(t))$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда пробная и исходная частицы имеют заряды противоположных знаков. Как известно (см., например, [17]), траектория движения частицы в кулоновском поле описывается уравнением (если начало координат совпадает с одним из фокусов эллипса; R и ϕ — полярные координаты; R_* и e — фокальный параметр и эксцентриситет эллипса):

$$R = \frac{R_*}{1+e\cos\phi}. \tag{25}$$

Учитывая закон сохранения момента импульса $\vec{L} = [\vec{R},\mu\dot{\vec{R}}] = const$, $\vec{L} = L\vec{e}_z$, $L = \mu R^2\dot{\phi}$, с помощью (25) получаем:

$$\dot{R} = \frac{eL}{\mu R_*}\sin\phi. \tag{26}$$

Используя формулы $\vec{R} = R\vec{e}_R = (R_x, R_y),\quad \dot{\vec{R}} = \dot{R}\vec{e}_R+R\dot{\phi}\vec{e}_\phi \equiv \vec{V},\quad \vec{e}_R = (\cos\phi,\sin\phi)$, приходим к следующему представлению вектора скорости (считаем, что траектория движения частицы является плоской кривой, лежащей в плоскости xy):

$$\vec{V} = \frac{L}{\mu R^2}\left(\frac{e}{R_*}R_y(R_x, R_y) + (-R_y, R_x)\right) \equiv \vec{\tilde{V}},$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial R_x} = \frac{L}{\mu R^4}\left(2R_xR_y - \frac{e}{R_*}R_y(R_x^2 - R_y^2)\right), \quad \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial R_y} = \frac{L}{\mu R^4}2R_xR_y\left(\frac{e}{R_*}R_x - 1)\right), \tag{27}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial R_y} = \frac{L}{\mu R^4}(R_x^2 - R_y^2)\left(\frac{e}{R_*}R_x - 1)\right), \quad \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial R_x} = -\frac{L}{\mu R^4}\left(2\frac{e}{R_*}R_xR_y^2 + R_x^2 - R_y^2\right),$$

где $\vec{\tilde{V}} = (\tilde{V}_x, \tilde{V}_y) = \vec{\tilde{V}}(\vec{R})$ — вектор скорости, представленный как функция $\vec{R}$. Имеют место соотношения:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}} = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{eL}{\mu R_*}\frac{R_y}{R^2}, \quad [d/dt, \vec{\nabla}_{\vec{R}}] = -\sum_\alpha \vec{g}_\alpha \partial/\partial R_\alpha, \quad \vec{g}_\alpha = \vec{\nabla}_{\vec{R}}\tilde{V}_\alpha. \tag{28}$$

На основании соотношений (25), (26) и (28) можно заключить, что $\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}} = 0$ только при условии, что $e = 0$, когда траекторией движения частицы является окружность. В самом деле, в этом случае, согласно (25), $R = R_*, \quad \dot{R} = 0$.

Выпишем первое из уравнений (16) при $\varepsilon = 0$:

$$\mu\ddot{\vec{R}} = \vec{F}(\vec{R}), \quad \vec{F}(\vec{R}) = kq_1q_0\frac{\vec{R}}{R^3}. \tag{29}$$

Используя соотношения (27), нетрудно убедиться в том, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\mu\ddot{\vec{R}} = \mu d\vec{\tilde{V}}/dt = \mu\sum_\alpha\left(\tilde{V}_\alpha\partial/\partial R_\alpha\right)\vec{\tilde{V}} = -\frac{L^2}{\mu R_*}\frac{\vec{R}}{R^3},$$

которые находятся, как и должно быть, в согласии с (29). Из сравнения последнего равенства с (29) получаем следующее выражение, связывающее постоянную в законе Кулона с интегралами движения частицы по траектории: $kq_1q_0 = -L^2/\mu R_*$.

Перейдем к выводу уравнений, аналогичных первой паре уравнений Максвелла. Необходимо найти выражения для следующих величин: $d\vec{B}/dt, \quad \vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B}$. Пусть

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B} = f(\vec{R}), \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H}, \tag{30}$$

где $f(\vec{R})$ и μ_0 – искомые величины. Дифференцируем первое из равенств (30) по времени:

$$d(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B})/dt = df(\vec{R})/dt \quad \to \quad \vec{\nabla}_{\vec{R}}\, d\vec{B}/dt + [d/dt, \vec{\nabla}_{\vec{R}}]\vec{B} = df(\vec{R})/dt. \tag{31}$$

Вычисляем:

$$[d/dt, \vec{\nabla}_{\vec{R}}]\vec{B} = -\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial \tilde{V}_\alpha}{\partial R_\beta}\frac{\partial B_\beta}{\partial R_\alpha}.$$

В последнем выражении выделяем слагаемое, имеющее вид дивергенции некоторого вектора. Ввиду того, что это выражение аналогично (19), можно воспользоваться равенством (20), выполнив в нем замену $\vec{E} \to \vec{B}$:

$$[d/dt, \vec{\nabla}_{\vec{R}}]\vec{B} = -\vec{\nabla}_{\vec{R}}\left((\vec{B}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{\tilde{V}} - \vec{B}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}})\right) - (\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B})(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}}).$$

Подставляем это равенство в (31) и учитываем (30):

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}}\left(d\vec{B}/dt - \left((\vec{B}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{\tilde{V}} - \vec{B}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}})\right)\right) - (\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B})(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}}) - (\vec{\tilde{V}}\vec{\nabla}_{\vec{R}})(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B}) = 0. \tag{32}$$

Сумму последних двух слагаемых в левой части этого равенства можно записать в виде:

$$-(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B})(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}}) - (\vec{\tilde{V}}\vec{\nabla}_{\vec{R}})(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B}) = -\vec{\nabla}_{\vec{R}}\left(\vec{\tilde{V}}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B})\right).$$

Значит, получаем уравнение:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}}\left(d\vec{B}/dt-\left((\vec{B}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{\tilde{V}}-\vec{B}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}})\right)-\vec{\tilde{V}}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B})\right)=0.$$

В результате приходим к следующей первой паре уравнений:

$$d\vec{B}/dt-\left((\vec{B}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{\tilde{V}}-\vec{B}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}})\right)-\vec{\tilde{V}}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B})=c_2[\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{X}],\quad \vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B}=f(\vec{R}),\quad c_2=const. \tag{33}$$

Мы полагаем, что поле $\vec{X}$ совпадает с напряженностью электрического поля $\vec{E}$, поле $\vec{B}$ является вихревым и поэтому $f(\vec{R})=0$. Постоянные μ_0 и c_2 выбираем, сопоставляя модифицированные уравнения с уравнениями Максвелла: $c_2=-1,\quad \mu_0=1/\varepsilon_0 c^2$.

Удобно ввести обозначения:

$$\vec{D}_{\vec{E}}(\vec{R})=\vec{E}(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{\tilde{V}})-(\vec{E}\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{\tilde{V}}=E_x\vec{\Lambda}_{\vec{R}}\tilde{V}_y-E_y\vec{\Lambda}_{\vec{R}}\tilde{V}_x\equiv\vec{D}_{\vec{E}},\quad \vec{\Lambda}_{\vec{R}}=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial R_y}-\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial R_x}. \tag{34}$$

В окончательной форме модифицированные уравнения электромагнитного поля выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}&d\vec{B}\big/dt+\vec{D}_{\vec{B}}=-[\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{E}],\quad \vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{B}=0,\\&\varepsilon_0 d\vec{E}\big/dt-\vec{j}+\varepsilon_0\vec{D}_{\vec{E}}=[\vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{H}],\quad \vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{E}=\rho/\varepsilon_0,\end{aligned} \tag{35}$$

где $\vec{j}=\vec{\tilde{V}}\rho,\quad \rho=\rho(\vec{R}),\quad \vec{V}=\vec{v}-\vec{v}_0$. Для сравнения приведем здесь обычные уравнения Максвелла (см. (10) и (11)):

$$\begin{aligned}&\partial\vec{B}\big/\partial t=-[\vec{\nabla}\vec{E}],\quad \vec{\nabla}\vec{B}=0,\\&\varepsilon_0\,\partial\vec{E}\big/\partial t+\vec{j}=[\vec{\nabla}\vec{H}],\quad \vec{\nabla}\vec{E}=\rho/\varepsilon_0.\end{aligned} \tag{36}$$

Как видно из сопоставления уравнений (35) и (36), различие между ними весьма значительно. В частности, уравнения (35), содержащие роторные члены, имеют поправки к изменяющейся со временем магнитной индукции ($\vec{D}_{\vec{B}}$) и к току смещения ($\varepsilon_0\vec{D}_{\vec{E}}$). Появление этих поправок связано с ускоренным движением пробного заряда в кулоновском поле исходного заряда. Различие между приведенными выше уравнениями обусловлено тем, что уравнения (35) описывают электромагнитное поле вдоль траектории движения пробного заряда, служащего в качестве простейшего измерительного прибора, регистрирующего поле, а уравнения (36) описывают поле в точках наблюдения в отсутствие пробного заряда, т.е. без учета влияния измерительного прибора на исследуемое поле.

Следует подчеркнуть, что появление поправок в уравнениях (35) указывают на существование физических эффектов, которые выпадают из поля зрения электродинамики Максвелла. Поправка $\vec{D}_{\vec{B}}$ в первом из уравнений (35) означает, что вихревое электрическое поле создается не только изменяющимся со временем, но и изменяющимся в пространстве магнитным полем. Поправка же $\varepsilon_0\vec{D}_{\vec{E}}$ в третьем из уравнений (35) говорит о том, что ток смещения имеет составляющую, обусловленную изменением напряженности электрического поля в пространстве.

С формальной точки зрения, различие между уравнениями (35) и (36) отражает два разных подхода к выводу уравнений электромагнитного поля, порождаемого классической точечной частицей. В одном из них радиус-вектор точки наблюдения $\vec{r}$ и время наблюдения t считаются независимыми переменными, и поэтому принимается, что $[\partial/\partial t,\vec{\nabla}_{\vec{r}}]=0$. Этот подход, основанный на предположении, что измерительный прибор не влияет на исследуемое поле, реализуется уравнениями Максвелла. Модифицированные уравнения представляют собой следствие другого подхода, в котором учитывается, что кулоновское взаимодействие пробного заряда с исходной частицей может существенно исказить исследуемое поле. В этом подходе исходный и пробный заряды рассматриваются как равноправные составляющие двухчастичной системы и, вследствие этого, возникает отличный от нуля коммутатор: $[d/dt,\vec{\nabla}_{\vec{r}}]\neq 0$.

3. Заключение

Причина трудностей общепринятой формулировки электродинамики коренится в том, что уравнения Максвелла основаны на законе Кулона для заряженных частиц. Как видно из полученных в работе результатов, внесение в точку наблюдения пробной частицы, служащей для проведения процедуры измерения, существенно искажает исследуемое электромагнитное поле. Учет влияния пробного заряда на исследуемое поле требует модификации уравнений Максвелла. Это связано с тем, что взаимодействие пробного заряда с исследуемым полем невозможно описать, оставаясь в рамках одночастичной задачи, следствием которой являются уравнения Максвелла.

Одним из основных понятий электродинамики является электрический заряд, который, как полагают, создает в окружающем пространстве силовое поле, подчиняющееся закону Кулона. Это понятие не имеет, однако, физического определения. Имеющиеся ныне в литературе определения электрического заряда сводятся к словесным утверждениям, что заряд является источником (генератором) электромагнитного поля, внутренней характеристикой элементарных частиц, определяющей электромагнитное взаимодействие, и что электромагнетизм есть проявление существования, движения и взаимодействия электрических зарядов [18]. Приведенные выше утверждения не раскрывают, однако, физической сущности электрических зарядов и поэтому не могут дать ответа на вопрос, что такое электрический заряд. Физический смысл заряда не разъясняет и теорема Гаусса, согласно которой плотность электрического заряда сводится к дивергенции напряженности кулоновского поля $\vec{\nabla}\vec{E}$ (см. равенство (4)), поскольку закон Кулона — не более чем гипотеза, не имеющая физического обоснования [4]. Очевидно, что, руководствуясь существующими ныне представлениями об электрическом заряде и кулоновских силах, глубоко укоренившимися в общественном сознании, невозможно в принципе устранить трудности электродинамики.

Как показано в работах [5,6,11], из поля зрения механики Ньютона выпал огромный класс движений — криволинейные движения частиц по инерции, которые играют в природе фундаментальную роль, будучи ответственными, в частности, за явления гравитации и антигравитации [7,8]. Согласно [5-7], гравитация — это не особый вид взаимодействия между телами, а проявление ускоренного движения тел по инерции. Результаты исследований, приведенные в [5-12], наводят на мысль, что электромагнитные явления, как и гравитацию, можно описать и объяснить, используя криволинейные движения частиц по инерции. Эта мысль получила обоснование в работе [12], в которой рассмотрено взаимодействие между частицами двухчастичной системы, находящейся в состоянии ускоренного движения по инерции, и показано, что сила взаимодействия отличается от кулоновской силы малыми поправками порядка e (e — эксцентриситет эллипса, по которому движется частица; $e \ll 1$). По-видимому, этот результат указывает на то, что электрический заряд является одним из проявлений криволинейного движения классических частиц по инерции. Естественно ожидать, что раскрытие физической сущности электрического заряда позволит устранить трудности электродинамики.

Литература:

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм. — М.: Мир, 1966.
2. *Дирак П. А. М.* Собрание научных трудов. Т. IV. Гравитация и космология. Воспоминания и размышления (лекции, научные статьи 1937-1984 гг.). / Под общ. Ред. А. Д. Суханова. — М.: Физматлит, 2005. — 784 с.
3. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.
4. *Фейнман Р.* Характер физических законов. — М.: Наука, 1987. — С. 33–34.
5. *Олейник В. П., Прокофьев В. П.* Вращательная инерция и ее физические следствия. Что такое гравитация? // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2008. — №2(30). — С. 23–56.
6. *Олейник В. П.* Новый подход к проблеме движения: ускоренные движения по инерции. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2009. — №3(35). — С. 24–56.
7. *Олейник В. П.* О физической природе гравитации. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2010. — №3(39). — С. 24–55.

8. *Олейник В. П., Третяк О. В.* Проблема инерции и антигравитация. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2011. — №1(41). — С. 24-52.
9. *Oleinik V. P.* Motions by inertia and the Coulomb field. // Odessa astronomical publications. — Vol. 25. — Issue 2. — 2012. — P. 133.
10. *Олейник В. П.* Криволинейные движения по инерции и закон Кулона. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2012. — №3(47). — С. 34–39.
11. *Олейник В. П.* О физической сущности явления криволинейного движения по инерции. Классическая частица как открытая самоорганизующаяся система. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2013. — №2(50). — С. 13–46.
12. *Олейник В. П.* Закон всемирного тяготения и криволинейное движение по инерции. О физической природе силы, регистрируемой в опыте Кавендиша. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2013. — №4(52). — С. 11–32.
13. *Олійник В. П.* Електромагнітне поле. Конспект лекцій з курсу «Загальна фізика». — К.: КПІ, 1991.
14. *Степанов С. С.* Релятивистский мир — лекции по теории относительности, гравитации и космологии. Закон Кулона. Гл. 5. — http://synset.com/ru/Заглавная_страница.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
17. *Астахов А. В.* Курс физики. Т. 1. Механика. Кинетическая теория материи. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.
18. Физический энциклопедический словарь. / Гл. редактор А. М. Прохоров. — М.: Советская энциклопедия, 1983.

Статья поступила в редакцию 06.11.2014 г.

Oleinik V.P.

The Dirac problem.
Generalization of Maxwell’s equations for electromagnetic field

The Dirac problem is to answer the question, what is the cause of serious difficulties of electrodynamics and how to eliminate them. The key to solving the problem lies in the analysis of incompleteness of Maxwell's electrodynamics, which is due, in particular, to the fact that electrodynamics is based on the Coulomb law of interaction between electric charges. It is shown that the action of the test charge used for the measurement procedure on the investigated electromagnetic field is not a small perturbation. Consideration this disturbance requires substantial changes in the equations of motion of the field. The modified equations of motion of electromagnetic field are obtained and investigated, taking into account the influence of the test particle on the field. It is shown that the modified field equations contain amendments, the appearance of which indicates the existence of physical effects, dropped out of sight of Maxwell's electrodynamics. Thus, it follows from the modified equations that the vortex electric field is generated not only by the magnetic field varying in time, but also by the magnetic field varying in space. To overcome the difficulties of electrodynamics one has to reveal the physical nature of electric charge, based on curvilinear motions of classical particle by inertia.

Key words: Dirac problem, incompleteness of Maxwell’s electrodynamics, electric charge, the modified equations of electromagnetic field, curvilinear motions by inertia.