Теория гравитации

УДК 524.827+531.51+530.12

Олейник В. П.

НОВЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ДВИЖЕНИЯ: УСКОРЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ИНЕРЦИИ

Department of General and Theoretical Physics,
National Technical University of Ukraine «Kiev Polytechnic Institute»
37, Prospect Pobedy, Kiev, 03056, Ukraine;
http://superluminalelectron.org/en; http://kpi.ua/zitf; e-mail: valoleinik@gmail.com

Доказано, что в общепринятой ньютоновской схеме механики выпадает из поля зрения обширный класс движений — ускоренные (криволинейные) движения частиц по инерции. На частицы, движущиеся по криволинейной траектории по инерции, действуют силы чисто кинематической природы, которые качественно отличаются от сил, рассматриваемых в механике Ньютона. Фундаментальная роль, какую ускоренные движения по инерции играют в природе, обусловлена тем, что эти движения совершаются в отсутствие каких-либо энергетических затрат и поэтому приводят к возникновению наиболее устойчивых состояний физических систем.

Исключив из рассмотрения ускоренные движения по инерции, обеспечивающие стабильность окружающего мира, механика Ньютона оказалась неспособной объяснить и описать должным образом многие физические явления и процессы, например, гравитацию и аномальные явления. Цивилизация достигла такого уровня развития, который позволил обнаружить, что **классическая механика и ее релятивистские обобщения — специальная и общая теории относительности, как методы исследования природы, не дают физической картины мира, адекватной реальности. Отсюда следует необходимость радикального пересмотра ньютоновской схемы механики,** лежащей в основе всей современной физики. **В настоящей работе развивается принципиально новый подход к проблеме движения, основывающийся на расширении общепринятых представлений о движении материальных тел по инерции**.

Состояния ускоренного движения частиц по инерции, как наиболее стабильные, естественно рассматривать в качестве фона, на котором происходят реальные, физические процессы. Иными словами, в новой, расширенной схеме механики ускоренные движения по инерции играют роль начала отсчета физических процессов. Наблюдаемые на опыте физические процессы следует трактовать как отклонения от состояний ускоренного движения по инерции, вызванные воздействием какого-либо возмущения. Под действием, например, внешней силы физическая система выводится из состояния ускоренного движения по инерции, и этот процесс можно описать с помощью уравнений движения Ньютона. Такова, в общих чертах, новая, расширенная схема описания динамических процессов, представленная в данной работе.

Подтверждением справедливости выводов данной работы может служить обширный, накопленный в течение полувека наблюдательный материал об **аномальных явлениях**, демонстрирующих недостижимые для современной техники возможности (см. Заключение). **Разработка технологий и создание электронных приборов на основе развиваемой здесь расширенной схемы механики приведут, очевидно, к следующему уровню развития цивилизации**.

Ключевые слова: неполнота ньютоновской схемы механики, расширенная схема механики, ускоренное движение частицы по инерции, вращательная инерция, криволинейная инерция, силы кинематической природы, неэквивалентность инерциальных систем отсчета, сильная и слабая инерции, движение по инерции на поверхности сферы, гравитация, аномальные явления и криволинейная инерция.

> ... чтобы понять физические законы, вы должны усвоить себе раз и навсегда, что все они — в какой-то степени приближения.
> *Р. Фейнман* ([1], с.211)

Действительность велика, беспредельна, бесконечна и разно-образна, она никогда не укладывается в рамки наших признан-

ных понятий, наших самых последних знаний ...
И. П. Павлов (Лекции И. П. Павлова «Об уме вообще, о русском уме в частности», Петербургский филиал Архива РАН, Ф.259)

1. Введение

В данной работе доказано, что из поля зрения механики Ньютона выпадает обширный класс движений, играющих в природе ключевую роль, т. е. **ньютоновская схема механики является существенно неполной. Сформулирован качественно новый подход к решению проблемы движения, обобщающий и существенно расширяющий общепринятую схему путем включения в рассмотрение ускоренных движений частиц по инерции**.

Проблема неполноты классической механики неоднократно обсуждалась в литературе [1-4]. Приведем известное высказывание Р. Фейнмана по этой проблеме [1]: «Истинное ... содержание законов Ньютона таково: предполагается, что сила обладает независимыми свойствами в дополнение к закону

$$\vec{F} = m\vec{a}\,; \qquad (*)$$

но характерные независимые свойства сил не описал полностью ни Ньютон, ни кто-нибудь еще; поэтому физический закон $\vec{F} = m\vec{a}$ — закон неполный». Глубокий смысл этого высказывания разъясняют следующие слова, принадлежащие С. Э. Хайкину [2]: «Так как для установления способа измерения массы тела используется тот же второй закон Ньютона (величина массы тела определяется одновременным измерением силы и ускорения), то второй закон Ньютона содержит, с одной стороны, утверждение, что ускорение пропорционально силе, а с другой — определение массы тела как отношение силы, действующей на тело, к сообщаемому этой силой ускорению.» Речь идет, таким образом, о том, что масса тела m и сила $\vec{F}$, входящие в уравнения движения (*), не имеют независимых определений. Как подчеркивает И. В. Савельев [3], «для определения одной из них (m или $\vec{F}$) приходится использовать соотношение (*), связывающее эту величину с другой и с ускорением $\vec{a}$.»

Хотя дискуссии о неполноте классической механики и не привели к нахождению каких-либо радикальных способов устранения этого недостатка стандартной теоретической схемы, они привлекли внимание исследователей к этой важнейшей и до сих пор не решенной проблеме механики, имеющей множество различных аспектов и тонких нюансов [4], и стимулировали поиски путей ее решения.

Настоящая работа, стимулированная упомянутыми дискуссиями, и посвящена существенному расширению существующих ныне физических представлений о силах и связанных с ними движениях материальных тел. В работе рассмотрены такие движения точечных частиц по криволинейным траекториям, которые не требуют для своего совершения каких-либо энергетических затрат. Такого рода движения мы называем **ускоренными (криволинейными) движениями частиц по инерции**.

Существование криволинейного движения точечной частицы по инерции было впервые обосновано в работе [5] на простейшей модели — модели плоского вращательного движения на физическом уровне строгости, принятом в современной теоретической физике. В этой работе введено понятие **вращательной инерции частицы** как непосредственное обобщение поступательного движения по инерции, определяемого принципом инерции Галилея, на случай движения по окружности.

Вращательная инерция при плоском движении теперь обобщается нами на движение частицы в пространстве по произвольной криволинейной траектории.

Чтобы уяснить физическую природу явления вращательной инерции, обратимся к силам, которые могут действовать на частицу. В уравнениях движения механики (*) $\vec{F}$ — это сила, действующая на частицу массой m со стороны ее окружения, т. е. это внешняя по отношению к частице сила [6]. **В общепринятой схеме механики не существует других сил, действующих на данную частицу, кроме внешних сил**. Явление ускоренного движения по инерции свидетельствует, однако, о существовании сил, которые исключены из рассмотрения в стандартной ньютоновской схеме механики. Действительно, вращательная инерция частицы — это такое явление, в котором отсутствуют какие-либо силы, действующие на частицу со стороны ее окружения из-за явного отсутствия окружающих тел. Следовательно, **при вращательном движении по инерции действующая на частицу сила порождается самой частицей, и эта сила не является консервативной, в отличие от силы гравитационного притяжения между частицами, описываемой законом всемирного тяготения.** Необходимо подчеркнуть, что рассматриваемая сила порождается частицей вследствие ее движения по криволинейной траектории, т. е. имеет чисто кинематическое происхождение, и равна нулю в случае покоящейся частицы либо в случае частицы, движущейся равномерно и прямолинейно.

Возникновение силы при вращательной инерции обусловлено неоднородностью и неизотропностью пространства. Суть дела состоит в том, что пространство можно считать однородным и изотропным лишь в том случае, когда оно является пустым; пространство перестает быть однородным и изотропным при наличии в нем хотя бы одной частицы. Действительно, наличие частицы в пространстве означает, что в нем имеются две выделенные точки — точка, в которой находится частица, и центр кривизны траектории, по которой частица движется. Наличие в пространстве двух выделенных точек приводит также к появлению преимущественного направления, которое определяется прямой, проходящей через эти точки. Неоднородность и неизотропность пространства, в котором движутся частицы, означает, очевидно, что поступательное движение частицы по инерции оказывается неустойчивым: достаточно сколь угодно малого воздействия на частицу, чтобы ее движение стало криволинейным и возникла сила, действующая на частицу. Дальнейшее развитие процесса происходит таким образом, что частица переходит во все более и более устойчивые состояния движения; процесс завершается, очевидно, тем, что частица переходит в наиболее устойчивое состояние движения, каковым и является ускоренное движение по инерции, не требующее каких-либо энергетических затрат.

Согласно результатам работы [5], при **вращательной инерции** физической системы, состоящей из нескольких частиц, в окружающем пространстве появляется силовое поле, которое действует на частицу силой, совпадающей по форме с силой Лоренца (в формуле силы роль электрического заряда частицы играет ее масса). Из сравнения вращательного движения по инерции системы двух частиц с движением частиц, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения, оказалось, что величины, описывающие эти движения, совпадают между собой, кроме одной величины, — полной энергии частиц. При вращательной инерции полная энергия частиц положительна, а при описании движения согласно закону всемирного тяготения роль полной энергии играет энергия связи частицы в потенциальной яме, описывающей притяжение между частицами, и эта энергия отрицательна. Указанное различие является следствием принципиально различных подходов к описанию движения частиц в классической механике и в данной работе. Совпадение же физических величин, характеризующих движение частиц в рассматриваемых двух подходах, указывает на то, что **гипотеза о существовании в природе гравитационных сил, подчиняющихся закону всемирного тяготения, является излишней**. В этой гипотезе нет необходимости по той простой причине, что притяжение частиц между собой описывается естественным образом в новой, расширенной схеме механики, учитывающей явление ускоренного движения частиц по инерции и обходящейся без введения каких-либо дополнительных гипотез.

Подчеркнем, что **сила гравитационного притяжения, будучи следствием ускоренного движения по инерции, не является особым видом взаимодействия между материальными телами** [5]. **Глубоко ошибочно общепринятое представление о том, что частица, обладающая массой, порождает в окружающем пространстве силовое (гравитационное) поле независимо от состояния ее движения. Частица, действительно, порождает силовое поле, но это происходит лишь при условии ее движения по криволинейной траектории, причем порождаемое частицей силовое поле не описывается законом всемирного тяготения**.

В связи с тем, что в развиваемом подходе в качестве причины гравитации выступает ускоренное движение частиц по инерции, возникает вопрос: не получается ли так, что объяснение гравитации получается у нас ценой замены одной гипотезы на другую? Гипотезы о том, что в природе существует гравитационное взаимодействие, описываемое законом всемирного тяготения, на гипотезу о существовании ускоренных движений тел по инерции? Ответ состоит в том, что существование ускоренных движений по инерции не является дополнительной гипотезой, которая вводится нами в механику. В механике Ньютона молчаливо предполагается, что сила, действующая на частицу, может быть только внешней силой, действующей на нее со стороны окружающих тел. Суть дела заключается, однако, в том, что **сила, действующая на частицу, может порождаться самой частицей. Именно это и имеет место при ускоренном движении частицы по инерции.** Но такого рода сила не является внешней по отношению к рассматриваемой частице. И, следовательно, движение частицы в такой ситуации нельзя описать вторым законом Ньютона (*). Движение по инерции мы описываем, исходя из естественного требования, чтобы сила, порождаемая частицей, не совершала над нею работу при ее перемещении в пространстве.

Перечислим основные результаты, изложенные в последующих разделах работы.

В разделе 2 формулируются условия, при которых движение с ускорением классической точечной частицы происходит по инерции, т. е. без каких-либо энергетических затрат. Речь идет о таком движении частицы по криволинейной траектории, при котором сила, действующая на частицу вследствие ее ускорения, не совершает работы над частицей. Движение такого рода мы называем **ускоренным (криволинейным) движением по инерции**. Его частным случаем является **вращательная инерция**, введенная и исследованная при плоском движении в работе [5].

Условия ускоренного движения одной частицы по инерции сводятся к трем интегралам движения соответственно трем степеням свободы одночастичной системы. Интегралы движения позволяют дать классификацию различных типов ускоренных движений частицы по инерции.

Раздел 3 посвящен исследованию ускоренного движения частицы по инерции, происходящего по сферической поверхности. Различные типы движения по инерции объединяются в отдельные группы. Отмечается, что вращательная инерция может происходить как при $\vec{M} = 0$, так и при $\vec{M} \neq 0$, где $\vec{M}$ — момент силы, действующей на частицу, относительно центра вращения.

Как видно из полученных результатов, траектория движения частицы по инерции на сферической поверхности имеет сложную форму, которая определяется величиной параметра, зависящего от направления вектора момента импульса частицы. В зависимости от величины указанного параметра движение частицы может быть чистым вращением по окружности, лежащей на сферической поверхности, либо наложением двух движений — неравномерного вращения по окружности и колебаний. Поэтому движение по инерции на сфере естественно назвать **вращательно-колебательной инерцией**, в отличие от вращательной инерции, происходящей при плоском движении.

Формула силы, действующей на частицу при ее движении по инерции по поверхности шара, совпадает по внешнему виду с уравнениями движения для трехмерного изотропного осциллятора. Частица, движущаяся ускоренно по инерции по сфере, представляет собой, таким образом, трехмерный изотропный осциллятор.

В разделе 4 рассматривается ускоренное движение по инерции в общем случае, когда движение частицы не ограничивается сферической поверхностью. Согласно полученным результатам, в зависимости от значений параметров, описывающих движение, имеет место либо поступательная инерция, либо ускоренное движение по инерции, происходящее по поверхности конуса, с траекторией в виде расходящейся спирали, число витков которой может быть как конечным, так и бесконечно большим.

Принципиальные вопросы, касающиеся ускоренного движения по инерции, обсуждаются в разделе 5.

Рассматривается вращательное движение по инерции, происходящее в некоторой инерциальной системе отсчета S. Показано, что если из системы отсчета S перейти в систему отсчета S', движущуюся относительно S равномерно и прямолинейно, то с точки зрения наблюдателя в S' движение частицы не будет ускоренным движением по инерции. Значит, переход $S \to S'$ выбивает частицу из состояния вращательного движения по инерции. Отсюда следует, что ускоренное движение по инерции неинвариантно относительно преобразований Галилея. Исходная система отсчета S, в которой имеет место вращательная инерция, выделена среди всех других инерциальных систем отсчета, движущихся относительно S, т. е. принцип относительности не выполняется, если включить в рассмотрение ускоренное движение по инерции.

В ньютоновской схеме механики принимается, что сила, действующая на частицу, является внешней по отношению к частице: она действует на частицу со стороны окружающих ее тел. Однако в модели вращательной инерции действующая на частицу сила не является внешней из-за явного отсутствия окружения. Это сила чисто кинематического происхождения, порождаемая самой частицей вследствия движения частицы по криволинейной траектории. Такого рода силы не рассматриваются в общепринятой схеме механики: из поля зрения механики Ньютона выпадает обширный класс ускоренных движений по инерции. В этом состоит один из важнейших аспектов неполноты механики Ньютона.

В разделе 6 расширяется понятие ускоренного движения по инерции. Вводятся понятия ускоренного движения частиц по инерции в сильном смысле (сильная инерция) и в слабом смысле (слабая инерция). Под сильной инерцией понимаются такие движения по инерции, в которых каждая из компонент работы, производимой силой над частицей, обращается в нуль. Если не все компоненты работы, отвечающие отдельным степеням свободы частицы, обращаются в нуль, то соответствующее движение предлагается назвать слабой инерцией. Отмечается, что в случае слабой инерции имеется огромное число разновидностей движения по инерции, поскольку интегралы движения, описывающие движение по инерции, могут содержать произвольные функции. В состояниях движения по инерции в слабом смысле происходит перераспределение энергии системы между различными степенями свободы.

В разделе 7 рассматривается суперпозиция ускоренного движения частицы по инерции и поступательного движения с постоянной скоростью V_0. Согласно результатам раздела 5, такое движение, вообще говоря, не является ускоренным движением по инерции. Подробно исследовано линейное приближение по V_0, справедливое при условии $V_0 << |\vec{v}|$, где $\vec{v}$ - скорость частицы в нулевом приближении. В качестве нулевого приближения используется движение частицы по инерции по сферической поверхности (см. раздел 3). Исследование показывает, что при наложении поступательного движения на ускоренное движение по инерции параметры движения приобретают поправки, осциллирующие во времени с амплитудой осцилляций, пропорциональной V_0. Этот результат подтверждает вывод, сделанный в разделе 5, о физической неэквивалентности движущихся друг относительно друга инерциальных систем отсчета при учете ускоренных движений по инерции.

В разделе 8 теория ускоренного движения частицы по инерции обобщается на систему из двух частиц. Показано, что частицы движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с центром масс системы частиц, причем движение происходит таким образом, что расстояние между частицами сохраняется. При качественном описании можно сказать, что движение каждой частицы представляет собой наложение двух движений — вращательного движения по инерции и колебательного движения, состоящего в осцилляциях одной из угловых координат системы.

В разделе 9 отмечается, что ускоренное движение частицы по инерции можно трактовать как движение механического диполя. Вводится понятие механического дипольного момента, рассматривается приложение к двухчастичной системе и предсказывается существование физического эффекта, состоящего в возникновении силы, действующей на массивное тело, при условии, что над поверхностью тела движется частица по дуге, центр кривизны которой лежит на поверхности либо внутри тела. Проявлением этого эффекта служит преобразование вращательного движения тел, входящих в инерциоид (см.[17]), в поступательное движение центра масс инерциоида.

В Заключении формулируются основные выводы работы. На примере двухчастичной системы обсуждаются различия между новой, расширенной схемой механики и общепринятой. Разъясняется, почему ньютоновская схема механики неспособна объяснить гравитацию и аномальные явления. Отмечаются широкие перспективы создания качественно новых технологий в различных областях науки и техники, открывающиеся благодаря разработке нового подхода к проблеме движения.

2. Условия криволинейного движения по инерции

В работе [5] рассмотрен простейший случай криволинейного движения по инерции классической точечной частицы — плоское вращательное движение. Обобщим эти результаты на случай произвольного движения в пространстве.

Криволинейное движение частицы по инерции естественно определить как такое движение частицы по криволинейной траектории, которое происходит без каких-либо энергетических затрат. Иными словами, при движении по инерции сила, действующая на частицу, не должна производить над нею работу при ее перемещении вдоль траектории. Чтобы корректно описать криволинейное движение по инерции, необходимо, прежде всего, подготовить соответствующий математический аппарат и сформулировать ограничения, налагаемые на движение частицы.

Рассмотрим произвольное движение классической частицы по траектории. Радиус-вектор $\vec{r}$ частицы в сферических координатах r, θ, φ и векторы скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ и ускорения $\dot{\vec{v}}$ удобно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\vec{r} = r\vec{e}_{\vec{r}},\\ \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_{\vec{r}} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{n} - r\dot{\theta}\vec{\vec{m}} = \vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp},\\ \dot{\vec{v}} = \left(\ddot{r} - r\vec{\omega}^2\right)\vec{e}_{\vec{r}} + \left[2\frac{d}{dt}\left(r\dot{\varphi}\sin\theta\right) - r\dot{\varphi}\sin\theta\right]\vec{n} + \left(-2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} + r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{\vec{m}},\end{gathered} \tag{1}$$

где r и $\vec{e}_{\vec{r}}$ — модуль и орт радиуса-вектора $\vec{r}$; $\dot{\vec{e}}_{\vec{r}} = \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{n} - \dot{\theta}\vec{\vec{m}}$ — вектор, направленный перпендикулярно к радиусу-вектору $\vec{r}$; $\vec{e}_{\vec{r}}$, $\vec{n}$ и $\vec{\vec{m}}$ — орты сферической системы координат,

$$\begin{gathered}\vec{e}_{\vec{r}} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta), \quad \vec{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),\\ \vec{\vec{m}} = (-\cos\theta\cos\varphi,\ -\cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta),\end{gathered} \tag{2}$$

$\vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp}$ и $\vec{v}_{\perp}$ - поступательная и вращательная компоненты вектора скорости $\vec{v}$,

$$\vec{v}_{\|} = \dot{r}\vec{e}_{\vec{r}}, \quad \vec{v}_{\perp} = r\dot{\vec{e}}_{\vec{r}} = \vec{v}_{\perp 1} + \vec{v}_{\perp 2}, \quad \vec{v}_{\perp 1} = r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{n}, \quad \vec{v}_{\perp 2} = -r\dot{\theta}\vec{\vec{m}}. \tag{3}$$

Векторы $\vec{e}_{\vec{r}}$, $\vec{n}$, $\vec{\vec{m}}$ образуют правовинтовую тройку взаимно ортогональных ортов ($[\vec{e}_{\vec{r}}\,\vec{n}] = \vec{\vec{m}}$, $[\vec{n}\,\vec{\vec{m}}] = \vec{e}_{\vec{r}}$, $[\vec{\vec{m}}\vec{e}_{\vec{r}}] = \vec{n}$) и при $\theta = \pi/2, \varphi = 0$ совпадают с ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ декартовой системы координат, причем выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\dot{\vec{e}}_{\vec{r}} = [\vec{\vec{\omega}}\vec{e}_{\vec{r}}], \quad \dot{\vec{n}} = [\vec{\vec{\omega}}\vec{n}], \quad \dot{\vec{\vec{m}}} = [\vec{\vec{\omega}}\vec{\vec{m}}],\\ \vec{\vec{\omega}} = \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_{\vec{r}} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{\vec{m}}.\end{gathered} \tag{4}$$

Используя (3) и (4), вращательную компоненту вектора скорости можно записать в виде:

$$\vec{v}_{\perp} = r\dot{\vec{e}}_{\vec{r}} = r[\vec{\vec{\omega}}\vec{e}_{\vec{r}}] = [\vec{\omega}\vec{r}], \tag{5}$$

где

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{\vec{m}} \ — \tag{6}$$

вектор угловой скорости. Приведем равенства, которые неоднократно используются в дальнейшем:

$$\vec{\omega}^2 = \dot{\theta}^2 + (\dot{\varphi}\sin\theta)^2, \quad \vec{v}_{\perp}^2 = \vec{\omega}^2\vec{r}^2, \quad \vec{\omega} = [\vec{r}\vec{v}]/r^2. \tag{7}$$

Используя формулу для вектора скорости (1) и равенства (4), вектор силы, действующей на частицу массы m при ее движении, $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$, можно представить в следующей форме:

$$\vec{F} = m\left[\vec{e}_{\vec{r}}\frac{d}{dt}(\dot{r}) + \vec{n}\frac{d}{dt}(r\dot{\varphi}\sin\theta) - \vec{\vec{m}}\frac{d}{dt}(r\dot{\theta})\right] - m[\vec{v}\vec{\vec{\omega}}]. \tag{8}$$

Отметим, что последнее слагаемое в правой части (8) перпендикулярно к вектору скорости $\vec{v}$ и поэтому не дает вклада в выражение для работы, производимой силой над частицей при ее перемещении по траектории.

Обозначим через dA элементарную работу, производимую силой $\vec{F}$ над частицей при ее перемещении вдоль траектории за время dt: $dA = \vec{F}d\vec{r} = (\vec{F}\vec{v})dt$. Представляя вектор элементарного перемещения $d\vec{r}$ в виде суммы перемещений при поступательном и вращательных движениях (см. равенства (3)),

$$d\vec{r} = d\vec{r}_{||} + d\vec{r}_{\perp}, \quad d\vec{r}_{||} = \vec{v}_{||}dt, \quad d\vec{r}_{\perp} = d\vec{r}_{\perp 1} + d\vec{r}_{\perp 2}, \quad d\vec{r}_{\perp 1} = \vec{v}_{\perp 1}dt, \quad d\vec{r}_{\perp 2} = \vec{v}_{\perp 2}dt,$$

разложим элементарную работу на соответствующие компоненты:

$$\begin{gathered} dA = dA_{||} + dA_{\perp 1} + dA_{\perp 2}, \\ dA_{||} = \vec{F}d\vec{r}_{||} = (\vec{F}\vec{e}_{\vec{r}})\dot{r}dt, \quad dA_{\perp 1} = \vec{F}d\vec{r}_{\perp 1} = (\vec{F}\vec{n})r\dot{\varphi}\sin\theta dt, \quad dA_{\perp 2} = \vec{F}d\vec{r}_{\perp 2} = -(\vec{F}\vec{\vec{m}})r\dot{\theta}dt. \end{gathered} \tag{9}$$

В силу (5) и (9) полную элементарную работу при вращательном движении можно представить в виде:

$$dA_{\perp} = dA_{\perp 1} + dA_{\perp 2} = (\vec{F}\vec{v}_{\perp})dt = (\vec{F}[\vec{\omega}\vec{r}])dt = (\vec{\omega}[\vec{r}\vec{F}])dt = (\vec{\omega}\vec{M})dt, \tag{10}$$

где $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$ — вектор момента силы, действующей на частицу; $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости (6).

Движение по инерции определим как такое движение частицы, при котором компоненты работы, соответствующие перемещениям в трех взаимно перпендикулярных направлениях, обращаются в нуль, т. е.

$$dA_{||} = 0, \quad dA_{\perp 1} = 0, \quad dA_{\perp 2} = 0. \tag{11}$$

Вместо условий (11) можно использовать, очевидно, следующие эквивалентные им условия:

$$dA = 0, \quad dA_{\perp 1} = 0, \quad dA_{\perp} = 0. \tag{12}$$

В силу (1), (3) и (7), работу dA силы над частицей можно записать в виде:

$$dA = m(\dot{\vec{v}}\vec{v})dt = dK, \quad K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\vec{\omega}^2), \tag{13}$$

где K - кинетическая энергия частицы. Из (13) видно, что первое из равенств (12) приводит к следующему интегралу движения: $\dot{r}^2 + r^2\vec{\omega}^2 = const$, который можно записать так:

$$\dot{r}^2 + r^2\vec{\omega}^2 = v_0^2, \quad v_0 = const\,. \tag{14}$$

Принимая во внимание (1) и (9), компоненты работы легко преобразовать к следующему виду:

$$\begin{gathered} dA_{||} = \frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\dot{r}^2 - \omega^2\frac{d}{dt}r^2\right)dt, \\ dA_{\perp 1} = m\left[\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\frac{d}{dt}\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta)\right]dt, \\ dA_{\perp} = \frac{m}{2}\left(r^2\frac{d}{dt}\omega^2 + 2\omega^2\frac{d}{dt}r^2\right)dt. \end{gathered} \tag{15}$$

Складывая левые и правые части первого и последнего из равенств (15), легко убедиться в том, что $dA_{||} + dA_{\perp} = dA = dK$ (см. (13)).

Полагая, что $\dot{\varphi}^2r^2\sin^2\theta \neq 0$, обе части равенства $dA_{\perp 1} = 0$ (см.(11)), где величина $dA_{\perp 1}$ дается второй из формул (15), умножаем на $\dfrac{1}{\dot{\varphi}^2r^2\sin^2\theta}$ и после простых преобразований приходим к выражению $\dfrac{d}{dt}\ln(\dot{\varphi}r^2\sin^2\theta) = 0$, из которого следует интеграл движения

$$\dot{\varphi}r^2\sin^2\theta = c_1, \quad c_1 = const\,. \tag{16}$$

Используя выражение (8) для вектора силы, можно получить следующую формулу для момента силы $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$:

$$\vec{M} = m\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\vec{n} + m\left[2r\dot{\varphi}\frac{d}{dt}\left(r\sin\theta\right) + r^2\ddot{\varphi}\sin\theta\right]\vec{\vec{m}},$$

с помощью которой нетрудно проверить равенства

$$(\vec{\omega}\vec{M}) = (\vec{\tilde{\omega}}\vec{M}) = \frac{m}{2r^2}\frac{d}{dt}\left(r^4\vec{\omega}^2\right). \tag{17}$$

В силу (10) и (17), последнее из условий криволинейной инерции (12) приводит к интегралу движения

$$r^4\vec{\omega}^2 = const. \tag{18}$$

Отметим, что интеграл движения (18) следует также непосредственно из последней из формул (15), которую несложно преобразовать к виду: $dA_\perp = \frac{m}{2r^2}\frac{d}{dt}(r^4\vec{\omega}^2)dt$. Отсюда видно, что условие $dA_\perp = 0$ дает искомый интеграл движения.

Используя выражения (1) и (5), вычислим момент импульса частицы:

$$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}] = m[\vec{r}[\vec{\omega}\vec{r}]] = mr^2\vec{\omega} \tag{19}$$

Здесь $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс частицы, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, определяемый формулой (6). В силу (18) величина $\vec{L}^2 = m^2r^4\vec{\omega}^2$ является интегралом движения частицы по инерции. Этот же вывод следует и из уравнения моментов $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$. В самом деле, умножая скалярно обе части этого уравнения на $\vec{L}$ и используя (17) и (18), получаем:

$$\frac{\vec{L}d\vec{L}}{dt} = \vec{L}\,\vec{M} = mr^2(\vec{\omega}\vec{M}) \quad \to \quad \frac{d\vec{L}^2}{dt} = 0 \quad \to \quad \vec{L}^2 = const.$$

Таким образом, криволинейное движение частицы по инерции характеризуется следующими интегралами движения, вытекающими из условий (12):

$$\begin{aligned} &K = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\vec{\omega}^2) = const \quad \to \quad \dot{r}^2 + r^2\vec{\omega}^2 = v_0^2,\ v_0 = const,\\ &\vec{L}^2 = m^2r^4\vec{\omega}^2 = const, \quad \vec{\omega}^2 = \dot{\theta}^2 + (\dot{\varphi}\sin\theta)^2,\\ &\dot{\varphi}r^2\sin^2\theta = c_1, \quad c_1 = const. \end{aligned} \tag{20}$$

Отметим, что последнее равенство справедливо лишь при $\dot{\varphi}^2r^2\sin^2\theta \neq 0$. Если это неравенство не выполняется, то вместо последнего из интегралов движения (20) нужно воспользоваться непосредственно выражением (15) для работы $dA_{\perp 1}$.

Интегралы движения (20) позволяют дать классификацию различных типов движений частицы по инерции, объединив их в отдельные группы.

3. Криволинейное движение по инерции в ограниченной области пространства

Рассмотрим движение частицы по инерции при $r = r_0 = const \neq 0$, т. е. движение, происходящее по сферической поверхности радиуса r_0. Согласно (20), для движения такого рода

$$\vec{\omega}^2 = \frac{L^2}{m^2r_0^4} \equiv \omega_0^2, \quad \omega_0 = \frac{L}{mr_0^2} = const, \quad v_0 = r_0\omega_0 = \frac{L}{mr_0}. \tag{21}$$

Если $\dot{\varphi} = 0$, то условие $dA_{\perp 1} = 0$, ввиду (15), удовлетворяется автоматически и первое из равенств (21) дает: $\dot{\theta} = \pm\omega_0$ (см. (7)). Таким образом, имеется следующая группа движений частицы (назовем ее **группой 1**):

$$\theta = \pm\omega_0 t + \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \theta_0, \varphi_0 = const. \tag{22}$$

В соответствии с соотношениями (1),(3),(6),(8) и (19), движения этой группы описываются следующими векторами:

$$\vec{r} = r_0\vec{e}_{\vec{r}}, \quad \vec{v} = \mp r_0\omega_0\vec{\tilde{m}} = \vec{v}_\perp, \quad \vec{\omega} = \pm\omega_0\vec{n} = const, \quad \vec{F} = -m[\vec{v}\vec{\omega}] = -m\omega_0^2\vec{r}, \quad \vec{L} = mr_0^2\vec{\omega}. \tag{23}$$

Согласно (22) и (23), движения группы 1 представляют собой **вращение частицы по инерции**, происходящее в плоскости, проходящей через ось z и наклоненной к плоскости xz под углом φ_0. Траекторией частицы является окружность радиуса r_0; на частицу действует сила, направленная к центру окружности; момент импульса частицы относительно центра окружности сохраняется.

Во избежание недоразумений здесь уместно заметить, что, на первый взгляд, первая из формул (22) некорректна, поскольку в сферических координатах угол θ лежит в интервале $(0, \pi)$, а угловая переменная θ в (22) может принимать любое действительное значение. В действительности же формула (22) правильна. Нужно лишь принять во внимание, что при вращении частицы в указанной выше плоскости в течение полупериода движение происходит по полуокружности, лежащей в полуплоскости $\varphi = \varphi_0$, а в течение следующего полупериода частица движется по полуокружности, лежащей в полуплоскости $\varphi = \varphi_0 + \pi$; упомятые выше полуплоскости являются продолжениями одна другой, так что полуокружности, которые пробегает частица за период, составляют окружность, лежащую в одной плоскости.

Если $\dot{\varphi} \equiv \omega_1 = const \neq 0$, то из последнего из уравнений (20) следует, что $\theta = \theta_0 = const$. В силу (7) и (21) $\omega_1 = \pm \dfrac{\omega_0}{\sin\theta_0}$. Таким образом, существуют движения по инерции (**группа 2**), для которых

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \omega_1 t + \varphi_0, \quad \theta_0, \varphi_0 = const, \quad \omega_1 = \pm\omega_0 / \sin\theta_0 . \tag{24}$$

Эти движения характеризуются векторами

$$\vec{r} = r_0 \vec{e}_{\vec{r}}, \quad \vec{v} = \pm r_0 \omega_0 \vec{n} = \vec{v}_\perp, \quad \vec{\omega} = \pm\omega_0 \vec{m}, \quad \vec{\tilde{\omega}} = \pm\omega_0 (0,0,1)/\sin\theta_0, \quad \vec{F} = -m[\vec{v}\vec{\tilde{\omega}}] . \tag{25}$$

Вектор силы в (25) можно преобразовать к виду:

$$\vec{F} = -m r_0 \omega_0^2 \frac{1}{\sin\theta_0} (\cos\varphi, \sin\varphi, 0). \tag{26}$$

Отметим, что $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = \vec{e}_{\vec{r}} \Big|_{\theta=\pi/2}$ и $\vec{F} \perp \vec{v}$. Из соотношений (24)-(26) видно, что движения, принадлежащие к группе 2, представляют собой **вращательное движение частицы по инерции**, происходящее по поверхности шара радиуса r_0 в плоскости, параллельной плоскости xy. Радиус орбиты частицы составляет $r_0 \sin\theta_0$. На частицу действует сила $\vec{F}$ (26), направленная к центру орбиты частицы (ср. силу (26) с силой в (23)), причем $F \to \infty$ при $\sin\theta_0 \to 0$. Вектор момента импульса $\vec{L}$ прецессирует вокруг оси z с угловой скоростью $\omega_0 / \sin\theta_0$.

Сравнивая между собой движения по инерции, принадлежащие группам 1 и 2, легко установить, что момент силы $\vec{M} = 0$ для движений из группы 1 и $\vec{M} \neq 0$ для движений из группы 2, при этом во втором случае $\vec{M} \sim \vec{n}$ и поэтому $\vec{\omega}\vec{M} = 0$, так что в обоих случаях, согласно формуле (10), полная элементарная работа при вращательном движении обращается в нуль: $dA_\perp = 0$. Отсюда видно, что вращательное движение по инерции может иметь место как при $\vec{M} = 0$, так и при $\vec{M} \neq 0$.

К **группе 3** отнесем движения, для которых $\dot{\varphi} \neq const$. Исключая $\dot{\varphi}$ из интеграла движения $\vec{\omega}^2 = \omega_0^2$ (см. (21)) с помощью последнего из равенств (20), приходим к соотношению

$$\dot{\theta}^2 + \frac{c_1^2}{r_0^4 \sin^2\theta} = \omega_0^2, \tag{27}$$

из которого получается следующее уравнение:

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta} = \pm\frac{\omega_0}{\sin\theta}\sqrt{b^2 - \cos^2\theta}, \quad b^2 = 1 - \left(\frac{mc_1}{L}\right)^2, \tag{28}$$

где использованы равенства (21). Нас интересует решение этого уравнения $\theta = \theta(t)$, подчиняющееся начальному условию: $\theta(t_0) = \theta_0$. Из (28) видно, что $\cos^2\theta \leq b^2$, т. е. угол θ лежит в области $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, где $\theta_1 = \arccos b$, $\theta_2 = \arccos(-b)$.

Постоянную c_1, входящую в (28), удобно выразить через компоненту вектора момента импульса $\vec{L}$, вычисленного в начальный момент t_0. Чтобы получить соответствующую формулу, воспользуемся представлением (см. (19) и (6)):

$$\vec{L} = L_1\vec{n} + L_2\vec{\tilde{m}}, \quad L_1 = mr^2\dot{\theta} \equiv L_1(t), \quad L_2 = mr^2\dot{\varphi}\sin\theta \equiv L_2(t), \quad L_1^2 + L_2^2 = L^2 = const. \quad (29)$$

На основании (29) и последней из формул (20) выводим:

$$c_1 = \frac{L_{20}}{m}\sin\theta_0, \quad L_{20} = L_2(t_0)\,, \; b^2 = 1 - \left(\frac{L_{20}}{L}\sin\theta_0\right)^2. \quad (30)$$

Уравнение (28) удобно преобразовать к виду

$$\frac{d\cos\theta}{\sqrt{b^2 - \cos^2\theta}} = \mp\omega_0 dt\,. \quad (31)$$

Решение уравнения (31) дается формулой

$$\arcsin\left(\frac{\cos\theta}{b}\right) = \mp\omega_0 t + c\,.$$

Определяя постоянную c в последней формуле с помощью указанного выше начального условия, приходим к следующему выражению:

$$\arcsin\left(\frac{\cos\theta}{b}\right) = \mp\omega_0(t - t_0) + \arcsin\left(\frac{\cos\theta_0}{b}\right).$$

Отсюда

$$\cos\theta = b\sin(\alpha + \alpha_0), \quad \alpha = \mp\omega_0(t - t_0), \quad \alpha_0 = \arcsin\left(\frac{\cos\theta_0}{b}\right). \quad (32)$$

Уравнение для φ получается с помощью последнего из интегралов движения (20) и (32):

$$\dot{\varphi} = \frac{c_1}{r_0^2[1 - b^2\sin^2(\alpha + \alpha_0)]} = \frac{c_1}{r_0^2[a' + b'\cos 2(\alpha + \alpha_0)]}, \quad a' = 1 - \frac{b^2}{2}, \quad b' = \frac{b^2}{2}. \quad (33)$$

Решение этого уравнения, подчиняющееся начальному условию $\varphi = \varphi_0$ при $t = t_0$, имеет вид:

$$\varphi = \frac{c_1}{r_0^2}\int_{t_0}^{t} dt' \frac{1}{a' + b'\cos 2\left[\omega_0(t' - t_0) \mp \alpha_0\right]} + \varphi_0\,. \quad (34)$$

Замена переменной интегрирования $2\omega_0(t' - t_0) \mp 2\alpha_0 = x$ в (34) приводит к формуле:

$$\varphi = \frac{c_1}{2\omega_0 r_0^2}\int_{\mp 2\alpha_0}^{2\omega_0(t - t_0)\mp 2\alpha_0} \frac{dx}{a' + b'\cos x} + \varphi_0\,. \quad (35)$$

Так как $a'^2 - b'^2 = 1 - b^2 \ge 0$, то при вычислении интеграла в (35) можно воспользоваться следующим табличным интегралом ([7], с.162, 2.553.3.):

$$\int\frac{dx}{a' + b'\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a'^2 - b'^2}}\,arctg\left(\frac{\sqrt{a'^2 - b'^2}\,tg\dfrac{x}{2}}{a' + b'}\right).$$

Приведем окончательный результат:

$$\varphi = \frac{L_{20}}{|L_{20}|}arctg\left[\sqrt{1 - b^2}\,tg\left(\omega_0(t - t_0) \mp \alpha_0\right)\right] - \frac{L_{20}}{|L_{20}|}arctg\left[\sqrt{1 - b^2}\,tg\left(\mp\alpha_0\right)\right] + \varphi_0\,. (36)$$

Здесь учтено, что (см.(21) и (30))

$$\frac{c_1}{\omega_0 r_0^2\sqrt{1 - b^2}} = \frac{L_{20}}{|L_{20}|}. \quad (37)$$

При $b = 1$ (т. е. при $L_{20} = 0$ либо при $\sin\theta_0 = 0$) выражения (32) и (36) описывают движение, относящееся к группе 1: $\theta = \pm\omega_0(t - t_0) + \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0$ (см. (22)).

При $b = 0$, т. е. при $L_{20} = \pm L, \quad \sin\theta_0 = 1$, получается решение из группы 2 (см.(24)):

$$\theta=\theta_0=\frac{\pi}{2}, \quad \varphi=\pm\omega_0(t-t_0)+\varphi_0. \tag{38}$$

Равенства (38) описывают **вращательное движение частицы по инерции** в плоскости xy с угловой скоростью ω_0. Согласно (2) и (19), при таком движении момент импульса частицы сохраняется: $\vec{L}=\pm m r_0^2\omega_0\vec{\vec{m}}$, $\vec{\vec{m}}=(0,0,1)$.

При $b^2<<1$ из (32) выводим:

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \quad \varepsilon=\pm b\sin[\omega_0(t-t_0)\mp\alpha_0]. \tag{39}$$

Если дополнительно выполняются условия $b^2\left|tg\left(\omega_0(t-t_0)\mp\alpha_0\right)\right|<<1, \quad b^2\left|tg(\alpha_0)\right|<<1$, то из (36) получаем приближенную формулу:

$$\varphi=\frac{L_{20}}{|L_{20}|}\omega_0(t-t_0)+\varphi_0. \tag{40}$$

Из соотношений (39) и (40) видно, что при $b^2<<1$ **движение частицы по инерции представляет собой наложение двух движений**, происходящих на сферической поверхности радиуса r_0: **почти равномерного вращения частицы по окружности**, лежащей в плоскости xy, **и колебательного движения** с частотой ω_0, происходящего в сферическом слое $\frac{\pi}{2}-b\le\theta\le\frac{\pi}{2}+b$. С увеличением величины b амплитуда колебаний частицы возрастает и одновременно усиливается неравномерность вращения частицы в плоскости xy.

Согласно (32) и (36), при $b^2=1-\varepsilon^2$, $\varepsilon<<1$ движение частицы по инерции можно представить себе как наложение вращательного движения частицы по окружности, плоскость которой проходит через ось z при фиксированном значении $\varphi=\varphi_0$ и колебательного движения, описываемого колебаниями угловой переменной φ в окрестности $\varphi=\varphi_0$.

Таким образом, при $0<b<1$ траекторией движения частицы по инерции является сложная пространственная кривая, лежащая на поверхности сферы. Чистое вращение по инерции получается при $b=0$, либо при $b=1$.

Приведем выражения (32) и (36), описывающие движение частицы по инерции, при начальном условии $\theta=\theta_0=\pi/2, \quad \varphi=\varphi_0=0$ при $t=t_0=0$:

$$\cos\theta=\mp b\sin\alpha, \quad \varphi=\frac{L_{20}}{|L_{20}|}arctg\left(\sqrt{1-b^2}tg\alpha\right), \quad \alpha=\omega_0 t\ , \tag{41}$$

где $b^2=1-\left(\frac{L_{20}}{L}\right)^2$, $0\le b\le 1$, величина L_{20} определена формулами (29) и (30). Первое из соотношений (41) описывает **колебания частицы, происходящие при ее движении по поверхности сферы** и соответствующие осцилляциям угловой переменной θ в области (θ_1,θ_2), $\theta_1=\arccos b$, $\theta_2=\arccos(-b)$, относительно начального значения $\theta=\theta_0=\pi/2$. Поскольку колебания величины θ не выходят за пределы интервала $(0,\pi)$, то ввиду (41)

$$\sin\theta=+\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}\,. \tag{42}$$

Изменение знака перед b в формуле (41) означает, очевидно, изменение направления движения частицы на поверхности сферы и не изменяет форму траектории. Поэтому формула (42) остается в силе при любом знаке перед b в формуле (41).

Из второго из уравнений (41) несложно вычислить $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Простая выкладка дает (при $L_{20}>0$):

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{1-b^2}\sin\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}}, \quad \cos\varphi=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}}. \tag{43}$$

Формулы (41)-(43) дают зависимость от времени всех величин, определяющих траекторию движения частицы согласно уравнениям (41).

Отметим, что на колебательное движение частицы, описываемое осцилляциями угловой переменной θ, накладывается вращательное движение, описываемое зависимостью от времени угловой переменной φ согласно (43). Как видно из (41)-(43),

$$\dot{\theta} = \pm \frac{b\omega_0 \cos\alpha}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \alpha}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{1 - b^2}\,\omega_0}{1 - b^2 \sin^2 \alpha},$$

т. е. угловые скорости $\dot{\theta}, \dot{\varphi} \neq const$. Значит, колебательное и вращательное движения неравномерны. В результате суперпозиции колебательного и вращательного движений получается замкнутая пространственная кривая, лежащая на поверхности сферы.

Подстановка (41)-(43) в формулу (1) для радиуса-вектора приводит к следующему простому выражению:

$$\vec{r} = r_0 (\cos\alpha, \sqrt{1 - b^2} \sin\alpha, \mp b \sin\alpha), \quad \alpha = \omega_0 t. \tag{44}$$

Согласно (44), на частицу действует сила $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2 \vec{r}$, направленная к центру шара. По внешнему виду последнее равенство совпадает с уравнениями движения классической механики для трехмерного изотропного осциллятора. Значит, **частица, движущаяся по инерции по поверхности сферы, является изотропным трехмерным осциллятором**.

Используя (44), вычислим векторы скорости и момента импульса (см. (19)):

$$\vec{v} = r_0 \omega_0 (-\sin\alpha, \sqrt{1 - b^2} \cos\alpha, \mp b \cos\alpha), \quad \vec{L} = m r_0^2 \vec{\omega}, \quad \vec{\omega} = \omega_0 (0, \pm b, \sqrt{1 - b^2}). \tag{45}$$

Из (44) и (45) следует, что $\vec{r}\vec{v} = 0$ и $\vec{v}^2 = r_0^2 \omega_0^2$. Поэтому, в силу последнего из равенств (7), имеем: $[\vec{v}\vec{\omega}] = [\vec{v}[\vec{r}\vec{v}]] / r_0^2 = \omega_0^2 \vec{r}$. Значит, как и в случае чистой вращательной инерции, имеет место аналог силы Лоренца:

$$\vec{F} = m[\vec{v}(-\vec{\omega})], \quad \vec{\omega} = \vec{L} / m r_0^2. \tag{46}$$

Рассмотрим предельные случаи:

1. $b = 0$. В этом случае $\cos\theta = 0, \quad \sin\varphi = \sin\omega_0 t, \quad \cos\varphi = \cos\omega_0 t$. Значит, **получается вращательное движение по инерции, происходящее в горизонтальной плоскости** (в плоскости xy, $\theta = \pi/2$) с угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega_0(0,0,1)$.

2. $b = 1$. В этом случае $\cos\theta = \mp \sin\omega_0 t, \quad \sin\theta = |\cos\omega_0 t|, \quad \sin\varphi = 0, \quad \cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}$, т. е. имеет место **вращательное движение по инерции, происходящее в вертикальной плоскости** (в плоскости xz).

Таким образом, предельные случаи отвечают чистой вращательной инерции, когда траектория движения вырождается в плоскую кривую — окружность. Промежуточные случаи отвечают суперпозиции вращательного и колебательного движений, когда траекторией движения является сложная неплоская замкнутая кривая, лежащая на поверхности сферы.

4. Криволинейное движение по инерции (общий случай)

Перейдем к рассмотрению движения по инерции в общем случае: $r = r(t)$.

Исключая ω^2 из интегралов движения $\dot{r}^2 + r^2 \vec{\omega}^2 = v_0^2$ и $m^2 r^4 \vec{\omega}^2 = \vec{L}^2$ (см. (20)), приходим к следующему уравнению для определения r:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{a_1^2}{r^2}} \quad \to \quad \frac{rdr}{\sqrt{v_0^2 r^2 - a_1^2}} = \pm dt, \quad a_1 = \frac{L}{m}. \tag{47}$$

Представив последнее из уравнений (47) в виде $d\sqrt{v_0^2 r^2 - a_1^2} = \pm v_0^2 dt$, его решение запишем следующим образом ($c = const$ — постоянная интегрирования):

$$\sqrt{v_0^2 r^2 - a_1^2} = \pm v_0^2 (t + c). \tag{48}$$

Выражения (47) и (48) имеют физический смысл при $r^2 \geq a_1^2 / v_0^2$. Следовательно, функция

$r = r(t)$, определяемая равенством (48), должна иметь минимум при $r = \left|\frac{a_1}{v_0}\right| \equiv r_0$. Постоянную c в (48) определим из условия: $r = r_0$ при $t = t_0$. Это условие дает: $c = -t_0$. Полагая, что $t \geq t_0$, в соотношении (48) оставляем верхний знак и приходим к следующему уравнению, определяющему функцию $r = r(t)$:

$$\sqrt{v_0^2 r^2 - a_1^2} = v_0^2 (t - t_0)\,. \qquad (49)$$

В силу (49) искомая функция $r = r(t)$ определится следующим образом:

$$r = r_0\sqrt{1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2}, \quad r_0 = \frac{L}{mv_0}, \quad \omega_0 = \frac{v_0}{r_0}. \qquad (50)$$

В соответствии с (20) и (50) имеем:

$$\omega^2 = \frac{a_1^2}{r^4} = \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta = \frac{\omega_0^2}{\left[1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2\right]^2}, \quad \omega_0 = \frac{L}{mr_0^2}\,. \qquad (51)$$

Далее рассмотрим движение частицы отдельно при $\varphi = \varphi_0 = const$ и при $\theta = \theta_0 = const$ (см. движения (22) и (24) при $r = r_0 = const$).

В первом из указанных выше случаев величина θ определится из уравнения

$$\dot\theta = \pm\frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2}\,, \qquad (52)$$

которое следует из (51). Отсюда

$$\theta = \pm arctg[\omega_0 (t - t_0)], \quad \theta\Big|_{t=t_0} = 0\,. \qquad (53)$$

Так как $tg\theta = \pm\omega_0 (t - t_0), \quad \sin\theta = \pm\frac{\omega_0 (t - t_0)}{\sqrt{1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2}}$, то в декартовых координатах траектория движения частицы определяется уравнениями (см. (1) и (2)):

$$x = \pm r_0\omega_0 (t - t_0)\cos\varphi_0, \quad y = \pm r_0\omega_0 (t - t_0)\sin\varphi_0, \quad z = r_0\,.$$

Согласно последним соотношениям, частица движется по прямой в плоскости $z = r_0$ со скоростью $\vec v = \pm r_0\omega_0 (1, 1, 0)$, т. е. имеет место **поступательное движение по инерции**.

В случае

$$\theta = \theta_0 = const \qquad (54)$$

уравнение для φ получается с помощью последнего из интегралов движения (20) и выражения (50):

$$\dot\varphi = \frac{c_1}{r^2\sin^2\theta_0} = \frac{A\omega_0}{1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2}, \quad A = \frac{c_1}{\omega_0 r_0^2 \sin^2\theta_0} = \frac{L_{20}}{L}\frac{1}{\sin\theta_0}, \quad c_1 = \frac{L_{20}}{m}\sin\theta_0. \qquad (55)$$

С другой стороны, подставляя $\dot\varphi$ из (55) в (51), получаем равенство $A^2\sin^2\theta_0 = 1$. Отсюда и из (55) следует, что $L_{20} = \pm L$. Решение уравнения (55) можно записать в виде:

$$\varphi = \pm\frac{1}{\sin\theta_0} arctg[\omega_0 (t - t_0)], \quad \varphi\Big|_{t=t_0} = 0 \qquad (56)$$

Форма траектории, описываемой уравнениями (50), (54) и (56), существенно зависит от величины угла θ_0. Так, при $\sin\theta_0 = 1$ из (56) находим:

$$tg\varphi = \pm\omega_0 (t - t_0), \quad \sin\varphi = \frac{\pm\omega_0 (t - t_0)}{\sqrt{1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2}}\,.$$

Поэтому радиус-вектор частицы имеет вид: $\vec r = r_0 (1, \pm\,\omega_0 (t - t_0), 0)$, т. е. частица движется в плоскости $z = 0$ параллельно оси y со скоростью $\pm r_0\omega_0$.

При $\sin\theta_0 = \frac{1}{2}$ имеем: $tg\frac{\varphi}{2} = \pm\omega_0 (t - t_0),$, $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\pm\omega_0 (t - t_0)}{\sqrt{1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2}}$, $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 (t - t_0)^2}}$.

Значит,

$$\sin\varphi = \frac{\pm 2\omega_0(t-t_0)}{1+\omega_0^2(t-t_0)^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1-\omega_0^2(t-t_0)^2}{1+\omega_0^2(t-t_0)^2}.$$

Поэтому

$$\vec{r} = \frac{r_0}{2}\left(\frac{1-\omega_0^2(t-t_0)^2}{\sqrt{1+\omega_0^2(t-t_0)^2}},\ \frac{\pm 2\omega_0(t-t_0)}{\sqrt{1+\omega_0^2(t-t_0)^2}},\ \sqrt{3}\sqrt{1+\omega_0^2(t-t_0)^2} \right),$$

т. е. траекторией движения является сложная пространственная кривая, которая при $t-t_0 \to \infty$ асимптотически приближается к прямой $\vec{r} = \frac{r_0}{2}\left(-\omega_0(t-t_0),\ \pm 2,\ \sqrt{3}\omega_0(t-t_0)\right)$.

При изменении времени t в интервале (t_0, ∞) величина φ (56) изменяется в интервале $(0, \pi/2\sin\theta_0)$ (при условии, что в (56) сохраняется лишь верхний знак). При $0 < \sin\theta_0 << 1$ величина $\pi/2\sin\theta_0$ может значительно превышать 2π. Это значит, что уравнения (50), (54) и (56) описывают **расходящуюся спираль**: частица движется по поверхности конуса с вершиной в начале координат, ось конуса направлена вдоль оси z и образующая конической поверхности составляет угол θ_0 с осью z. Число витков спирали становится бесконечно большим при $\sin\theta_0 \to +0$.

Чтобы уточнить направление вектора момента импульса $\vec{L}$, используем представление (29) момента импульса $\vec{L}$. Учитывая (29), (54) и (55), находим: $L_1 = 0$, $L_2 = mr_0^2\omega_0 = L$. Таким образом, вектор $\vec{L}$ направлен вдоль $\vec{\vec{m}}$. Из равенства $\vec{\vec{m}} = (-\cos\theta_0\cos\varphi,\ -\cos\theta_0\sin\varphi,\ \sin\theta_0)$ видно, что вектор $\vec{L}$ прецессирует вокруг оси z с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ (см. (55)), угол между вектором $\vec{L}$ и осью z составляет $\frac{\pi}{2} - \theta_0$; вектор $\vec{L}$ лежит в плоскости xy при $\theta_0 = 0$ и направлен вдоль оси z при $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Согласно (55), $\dot{\varphi}\big|_{t=t_0} = \omega_0/\sin\theta_0$.

В самом общем случае движение частицы определяется системой уравнений

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta = \frac{L^2}{m^2r^4}, \quad \dot{\varphi} = \frac{c_1}{r^2\sin^2\theta}, \tag{57}$$

где зависимость $r = r(t)$ определяется соотношениями (50). Исключая $\dot{\varphi}$ из (57), после несложных преобразований получаем уравнение (ср. с (31))

$$\frac{d\cos\theta}{\sqrt{b^2-\cos^2\theta}} = \mp\frac{\omega_0\,dt}{1+\omega_0^2(t-t_0)^2}, \quad \omega_0 = \frac{L}{mr_0^2}, \tag{58}$$

(величина b^2 определена последней из формул (30)), интегрирование которого дает:

$$\arcsin\left(\frac{\cos\theta}{b}\right) = \mp arctg\left(\omega_0(t-t_0)\right) + c, \quad c = \arcsin\left(\frac{\cos\theta_0}{b}\right). \tag{59}$$

Здесь постоянная c определена из начального условия: $\theta = \theta_0$ при $t = t_0$.

Вычисляя sin от обеих частей первого из равенств (59), получаем формулу:

$$\cos\theta = \frac{\mp\omega_0(t-t_0)\sqrt{b^2-\cos^2\theta_0} + \cos\theta_0}{\sqrt{1+\omega_0^2(t-t_0)^2}}. \tag{60}$$

Несложная выкладка приводит к следующему выражению:

$$\sin^2\theta = \frac{b_1^2A^2}{1+\omega_0^2(t-t_0)^2}\left\{\left[\frac{\omega_0}{A}(t-t_0) \pm \frac{B}{A}\right]^2 + 1\right\}. \tag{61}$$

Здесь использованы обозначения (символы $\sqrt{1-b^2}$ и $\sqrt{1-b_1^2}$ имеют далее смысл арифметического значения корня):

$$b_1^2 = 1 - b^2 + \cos^2\theta_0 = 1 - \left(\frac{L_{10}}{L}\sin\theta_0\right)^2, \quad A = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b_1^2}, \quad B = \frac{\cos\theta_0\sqrt{1-b_1^2}}{b_1^2}.$$

Подставляя (61) во второе из соотношений (57), получаем уравнение

$$\dot{\varphi} = signL_{20}\frac{\omega_1}{\left(\omega_1(t-t_0)\pm\varphi_0\right)^2+1}, \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{A} = \omega_0\frac{b_1^2}{\sqrt{1-b^2}}, \quad \varphi_0 = \frac{B}{A} = \cos\theta_0\sqrt{\frac{1-b_1^2}{1-b^2}}, \qquad (62)$$

при выводе которого учтены первое из равенств (30) и равенство (37). Решение уравнения (62), подчиняющееся условию $\varphi(t_0)=0$, запишем в виде:

$$\varphi = signL_{20}\left[arctg\left(\omega_1(t-t_0)\pm\varphi_0\right) - arctg\left(\pm\varphi_0\right)\right]. \qquad (63)$$

Выражения (60),(61) и (63) существенно упрощаются при $\theta_0 = \pi/2$. В этом случае

$$\varphi_0 = 0, \quad \omega_1 = b_1\omega_0, \quad b^2 = \left(\frac{L_{10}}{L}\right)^2, \quad b_1^2 = \left(\frac{L_{20}}{L}\right)^2, \quad A = \frac{1}{b_1}.$$

Поэтому

$$\cos\theta = \frac{\mp b\omega_0(t-t_0)}{\sqrt{1+\omega_0^2(t-t_0)^2}}, \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{1+\omega_1^2(t-t_0)^2}{1+\omega_0^2(t-t_0)^2}}, \quad \varphi = signL_{20}\,arctg\left(\omega_1(t-t_0)\right),$$
$$\sin\varphi = \frac{signL_{20}\omega_1(t-t_0)}{\sqrt{1+\omega_1^2(t-t_0)^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_1^2(t-t_0)^2}}. \qquad (64)$$

Формулы (50) и (64) дают зависимость от времени t сферических координат $r,\ \theta, \varphi$ частицы, движущейся по инерции в интервале времени (t_0, ∞). Используя формулы (50) и (64), можно преобразовать радиус-вектор $\vec{r}$ частицы (1) к декартовым координатам. В результате получается следующее выражение:

$$\vec{r} = r_0(1,\ signL_{20}b_1\omega_0(t-t_0),\ \mp b\omega_0(t-t_0)). \qquad (65)$$

Согласно (65), частица движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v} = v_0(0,\ signL_{20}b_1,\ \mp b)$, т. е. имеет место **поступательное движение по инерции**. Нетрудно убедиться в том, что движение частицы по инерции остается поступательным при любом значении начальных углов θ_0 и φ_0. От величин θ_0 и φ_0 зависит лишь ориентация в пространстве прямой, по которой движется частица.

5. Сила, действующая на частицу при криволинейном движении по инерции, и неравноправие инерциальных систем отсчета

Как показано в работе [5] на частном примере, вращательное движение частицы по инерции, происходящее в некоторой инерциальной системе отсчета (ИСО) S, не является движением по инерции в системе отсчета S', движущейся относительно S равномерно и прямолинейно. Это значит, что системы отсчета S и S' не являются физически эквивалентными.

Ввиду принципиальной важности этого результата, проанализируем подробнее ситуацию, когда на вращательное движение по инерции накладывается поступательное движение, происходящее с постоянной скоростью.

Пусть в системе отсчета S частица массой m движется с угловой скоростью $\omega = const$ по окружности радиуса $r_0 = const$, расположенной в плоскости xy, с центром в начале координат. На частицу действует сила

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -m\omega^2\vec{r}, \qquad (66)$$

где $\vec{r} = r_0\vec{e}_{\vec{r}}$, $\vec{e}_{\vec{r}}$ — орт радиуса-вектора $\vec{r}$ частицы. Вследствие того, что $r_0 = const$, сила $\vec{F}$ не совершает работы над частицей. В самом деле, работа силы $\vec{F}$ (66) над частицей при ее перемещении на $d\vec{r}$ составляет, ввиду $\vec{r}^{\,2} = const$: $dA = \vec{F}d\vec{r} = -m\omega^2\frac{1}{2}d\vec{r}^{\,2} = 0$. Отсюда следует, что кинетическая энергия K частицы сохраняется: $dK = dA = 0,\ K = \frac{m\vec{v}^2}{2} = const,\quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Рассматриваемое движение частицы и является примером **вращательной инерции**.

В силу того, что при вращательной инерции линейная скорость $\vec{v}$ ($\vec{v} = \vec{v}_\perp$, $\vec{v}_\perp$ - вращательная компонента вектора скорости) связана с угловой скоростью $\vec{\omega}$ соотношением $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]$ (см.(5)), причем $\vec{\omega} \perp \vec{r}$, выполняется равенство $[\vec{\omega}\vec{v}] = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]] = -\vec{\omega}^2\vec{r}$. С помощью этого равенства формулу силы (66) можно записать в форме, аналогичной силе Лоренца:

$$\vec{F} = m[\vec{v}(-\vec{\omega})]. \tag{67}$$

Из (67) видно, что сила $\vec{F}$ (66), действующая на частицу при вращательной инерции, направлена перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}$ и поэтому работы не совершает.

Рассмотрим теперь систему отсчета S', движущуюся со скоростью $\vec{V}_0 = const$ относительно системы отсчета S. Считаем, что радиусы-векторы, $\vec{r}$ и $\vec{r}'$, и временные координаты, t и t', частицы в системах отсчета S и S' связаны между собой преобразованиями Галилея:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}_0 t, \quad t = t'. \tag{68}$$

В силу (68) кинетическую энергию частицы в системе отсчета S' можно представить в виде ($\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \vec{v} - \vec{V}_0$): $K' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} = \frac{m}{2}(\vec{v} - \vec{V}_0)^2$. Следовательно, работа dA', совершаемая в системе отсчета S' силой $\vec{F}'$ над частицей ($\vec{F}' = \vec{F}$) при ее перемещении за время dt, составляет:

$$dA' = dK' = -m(\dot{\vec{v}}\vec{V}_0)dt = m\omega^2 r_0(\vec{e}_{\vec{r}}\vec{V}_0)dt. \tag{69}$$

Здесь учтено, что при вращательном движении по инерции $\dot{\vec{v}} = -\omega^2\vec{r}$ (см. (66)). Заметим, что мощность, развиваемая силой $\vec{F}$, т. е. величина $dA'/dt \equiv N$, является периодической функцией времени с периодом $T = 2\pi/\omega$ (вследствие того, что при вращательном движении по инерции орт $\vec{e}_{\vec{r}}$ изменяется со временем по гармоническому закону с частотой ω). По этой причине среднее за период T значение мощности обращается в нуль [5]:

$$\bar{N} \equiv \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dA'}{dt}dt = 0, \tag{70}$$

где t_0 - произвольный момент времени.

Как видно из (67) и (69), сила, действующая на частицу при ее вращательном движении по инерции в системе отсчета S, не совершает в этой системе отсчета работы ($dA = 0$), однако в системе отсчета S' эта же сила, вообще говоря, совершает работу: $dA' \neq 0$. Согласно (69), $dA' = 0$ при условии, что

$$\vec{e}_{\vec{r}}\vec{V}_0 = 0, \tag{71}$$

т. е. в случае, когда радиус-вектор частицы в системе отсчета S перпендикулярен вектору скорости относительного движения систем отсчета. В этом случае суперпозиция поступательного движения со скоростью $\vec{V}_0 = const$ и вращательной инерции приводит, очевидно, к движению частицы по винтовой линии с осью, направленной вдоль вектора $\vec{V}_0$. Исследуем этот случай более подробно.

Разложив вектор скорости $\vec{v}'$ частицы в системе отсчета S' на поступательную и вращательную компоненты, $\vec{v}' = \vec{v}'_{||} + \vec{v}'_\perp,\quad \vec{v}'_{||} = \dot{r}'\vec{e}_{\vec{r}'},\quad \vec{v}'_\perp = r'\dot{\vec{e}}_{\vec{r}'}$, вычислим составляющие работы dA', совершаемой над частицей при поступательном и вращательном движениях:

$$dA' = dA'_{||} + dA'_\perp, \quad dA'_{||} = \vec{F}'\vec{v}'_{||}dt, \quad dA'_\perp = \vec{F}'\vec{v}'_\perp dt.$$

Здесь $r' = \left|\vec{r} - \vec{V}_0 t\right|,\quad \vec{e}_{\vec{r}'} = \vec{r}'/r'$. Учитывая формулы (66) и (68), получаем:

$$dA'_{||} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\dot{r}'\vec{e}_{\vec{r}'}dt = -m\omega^2(\vec{r}\vec{r}')\frac{\dot{r}'}{r'}dt = -m\omega^2 r^2\frac{\dot{r}'}{r'}dt = -m\omega^2\left(\frac{r}{r'}\right)^2\vec{V}_0^2 t dt,$$
$$dA'_{\perp} = m\frac{d\vec{v}}{dt}r'\dot{\vec{e}}_{\vec{r}'}dt = -m\omega^2(\vec{r}\vec{r}')r'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r'}\right)dt = m\omega^2 r^2\frac{\dot{r}'}{r'}dt = -dA'_{||}. \quad (72)$$

Здесь учтены условие (71) и равенства $\vec{r}\vec{v}=0,\ \vec{v}\vec{V}_0=0,\ \dot{r}'=\vec{V}_0^2 t/r'$. Из (72) следует, что при выполнении условия (71) полная работа, совершаемая силой над частицей, равна нулю ($dA'=0$), однако при этом $dA'_{||}\neq 0$ и $dA'_{\perp}\neq 0$, т. е. при движении частицы происходит перекачка ее энергии из поступательной степени свободы во вращательные (при $dA'_{||}<0$) и наоборот (при $dA'_{||}>0$). Строго говоря, такое движение частицы не является движением по инерции.

Значит, с точки зрения наблюдателя, находящегося в S', движение частицы не является, вообще говоря, криволинейным движением по инерции. Можно утверждать, таким образом, что криволинейное движение частицы по инерции неинвариантно относительно преобразований Галилея: переход $S\to S'$ выбивает частицу из состояния вращательного движения по инерции.

Подчеркнем, что система отсчета S оказывается выделенной по отношению ко всем прочим ИСО. Действительно, система отсчета S является единственной ИСО, в которой сила, действующая на частицу, не совершает над нею работу, и в которой траектория движения частицы представляет собой замкнутую кривую. Во всех других системах отсчета S', движущихся относительно S равномерно и прямолинейно, траекторией движения является незамкнутая кривая, хотя при некотором условии сила лишь перераспределяет энергию между поступательной и вращательными степенями свободы частицы, не совершая над нею работы.

Возвращаясь к выражению (66), отметим, что это выражение представляет собой не более, чем формулу силы, действующей на частицу при ее вращательном движении по инерции. Несмотря на это, поучительно проанализировать эту формулу с чисто формальной точки зрения, считая ее уравнением движения частицы, относящимся к системе отсчета S:

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F},\quad \vec{F}=-m\omega^2\vec{r}\ . \quad (73)$$

По внешнему виду первое из равенств (73) является уравнением движения осциллятора, на который действует упругая сила $\vec{F}=-k\vec{r}$ с коэффициентом упругости $k=m\omega^2=const$. Радиус-вектор $\vec{r}=\vec{r}(t)$, входящий в (73), — это вектор, проведенный из центра кривизны траектории частицы в точку нахождения частицы на траектории движения в момент времени t. Используя преобразования Галилея (68), преобразуем выражения (73) к системе отсчета S'. Преобразованные выражения можно записать так:

$$m\ddot{\vec{r}}'=\vec{F}',\quad \vec{F}'=-k(\vec{r}'+\vec{V}_0 t')\ . \quad (74)$$

Здесь $\vec{r}'$ - радиус-вектор частицы в системе отсчета S', $\vec{V}_0 t'$ — вектор, проведенный из начала координат O системы отсчета S в точку O' — начало координат в системе отсчета S'. Если ввести обозначение $\vec{R}'=\vec{r}'+\vec{V}_0 t'$, то выражения (74) можно представить в форме:

$$m\ddot{\vec{R}}'=\vec{F}',\quad \vec{F}'=-k\vec{R}'\ . \quad (75)$$

Вектор $\vec{R}'$ представляет собой разность двух векторов в системе отсчета S'- вектора $\vec{r}'$ и вектора $-\vec{V}_0 t'$, который является радиусом-вектором центра кривизны траектории частицы (т. е. точки O). Иными словами, $\vec{R}'$ - это радиус-вектор частицы в системе отсчета S', проведенный из центра кривизны траектории. Из сравнения выражений (73) и (75) видно, что выражения (73) сохраняют свою форму при переходе из S в S', т. е. они форминвариантны относительно преобразований Галилея. Однако из форминвариантности этих выражений не следует, что системы отсчета S в S' равноправны с физической точки зрения. Причина состоит в том, что выражения (73)-(75) являются не уравнениями движения частицы в системах отсчета S и S', а лишь принятыми в классической механике определениями сил в этих системах отсчета. Как разъяснялось выше, система отсчета S выделена среди ИСО, занимая особое, исключительное положение, поскольку только в S частица движется ускоренно по инерции.

Чтобы прояснить физическое содержание полученных результатов, нужно прежде всего уточнить понятие действующей на частицу силы $\vec{F}$, определенной формулами (66) и (67).

Как известно, физическое содержание второго закона Ньютона состоит в том, что сила, действующая на частицу со стороны ее окружения, является причиной ускорения частицы. Напомним, что **в механике Ньютона сила, действующая на частицу**, определяется как производная импульса частицы по времени или, что то же самое, как произведение массы частицы на ее ускорение и принимается, что она **обусловлена действием на частицу со стороны ее окружения** (см., например, [6]), т. е. **является внешней по отношению к частице силой**.

Следует подчеркнуть, что вращательное движение частицы по инерции является примером физического процесса, в котором действующая на частицу сила не является силой, действующей на нее со стороны окружающих тел. Сила, возникающая при вращательной инерции, не обусловлена, таким образом, взаимодействием частицы с окружением, т. е. имеет чисто кинематическое происхождение. Казалось бы, криволинейность траектории частицы может быть вызвана лишь действием на частицу внешней силы, и в отсутствие последней, в силу принципа инерции Галилея, движение должно быть равномерным и прямолинейным. Эти рассуждения основаны на укоренившихся в физике со времен Ньютона представлениях о том, что не может существовать действующей на частицу силы, отличной от внешней, и что движение по инерции может быть только поступательным. Рассмотренная в [5] модель вращательной инерции опровергает эти представления, указывая на возможность ускоренного движения по инерции и на существование в природе сил, которые не принимаются в расчет в механике Ньютона.

Возникновение вращательной инерции обусловлено неоднородностью и неизотропностью пространства. Суть дела состоит в том, что пространство можно считать однородным и изотропным лишь в том случае, когда оно является пустым; пространство перестает быть однородным и изотропным при наличии в нем хотя бы одной частицы. Действительно, наличие частицы в пространстве означает, что в нем имеются две выделенные точки — точка, в которой находится частица, и центр кривизны траектории, по которой частица движется. Наличие в пространстве двух выделенных точек автоматически приводит к появлению преимущественного направления, которое определяется прямой, проходящей через эти точки. Радиусы-векторы $\vec{r}$ и $\vec{R}'$, входящие в (73) и (75), — это и есть векторы, соединяющие указанные выше выделенные в пространстве точки и определяющие выделенное направление в пространстве в системах отсчета S и S'.

Вследствие неоднородности и неизотропности пространства, в котором движется частица, **прямолинейное движение частицы по инерции становится неустойчивым**: достаточно сколь угодно малого возмущения движения, чтобы возникло искривление траектории и появилась сила, действующая на частицу. Далее начинается процесс, состоящий в том, что частица стремится перейти в более устойчивое состояние. Этот процесс неизбежно завершается переходом частицы в состояние ускоренного движения по инерции как наиболее устойчивое состояние.

Из полученных результатов следует, что в природе существуют силы, которые имеют чисто кинематическое происхождение и качественно отличаются от сил, рассматриваемых в механике Ньютона. Особенность этих сил, к числу которых относятся силы, действующие на частицу при их криволинейном движении по инерции, состоит в том, что работа, совершаемая ими над частицей, существенно зависит от состояния движения ИСО, в которых рассматривается движение. Это значит, что ИСО, движущиеся равномерно и прямолинейно друг относительно друга, не являются физически эквивалентными, т. е. принцип относительности не имеет места.

Изложенное выше указывает на необходимость радикального пересмотра ньютоновской схемы механики, ибо в этой схеме не учитываются силы, ответственные за появление криволинейного движения по инерции. Принцип инерции Галилея и инерциальные системы отсчета не могут, очевидно, играть той фундаментальной роли, какая приписывается им в общепринятой схеме.

Механика Ньютона, в которой не учитываются действующие на частицы силы кинематической природы и криволинейная инерция, является весьма грубой схемой описания динамики. Кризис современной физики в значительной мере вызван тем, что в общепринятой схеме механики не учтены силы кинематической природы и обусловленное ими криволинейное движение по инерции [8,9]. Без учета криволинейной инерции невозможно, очевидно, получить адекватное природе описание поведения реальных физических систем и, в частности, понять и объяснить причину гравитации.

Состояния движения физических систем, отвечающие криволинейному движению частиц по инерции, должны быть наиболее стабильными как такие состояния, для поддержания которых не требуется каких-либо энергетических затрат, и поэтому следует ожидать, что именно такого рода состояния играют в природе фундаментальную роль. Подобные состояния, как наиболее устойчивые состояния, естественно рассматривать в качестве фона, на котором происходят реальные, наблюдаемые процессы. Под действием внешней силы физическая система выводится из состояния движения по инерции, и этот процесс можно описать с помощью уравнений движения Ньютона.

Исходным пунктом описания динамики должны быть, таким образом, состояния движения в условиях криволинейной инерции. Величину работы, производимой силой кинематического характера над частицей, естественно рассматривать как меру устойчивости движения частицы в рассматриваемой системе отсчета: состояние движения частицы тем более устойчиво, чем меньше величина работы этой силы над частицей. Из этих рассуждений видно, что состояния криволинейного движения по инерции должны играть в классической механике роль, аналогичную той, какую основное состояние играет в квантовой механике, а именно: подобно тому, как квантовая система стремится перейти в основное состояние, классическая система стремится перейти в состояние криволинейного движения по инерции.

Полученные нами результаты подтверждают справедливость приведенного во Введении высказывания Р. Фейнмана о неполноте классической механики. **Неполнота ньютоновской схемы механики состоит, в частности, в том, что из ее поля зрения выпали силы кинематической природы и обусловленный ими обширный класс движений частицы — ускоренные движения по инерции.** Пришло время существенно расширить общепринятые представления о силе и о движении.

6. Разновидности криволинейных движений по инерции: сильная и слабая инерции

Ввиду того, что криволинейное движение частицы по инерции играет в природе важную роль, представляет интерес детальное исследование различных типов криволинейной инерции.

Вначале обратимся к рассмотрению простейшего вида движения — плоского движения. Пусть движение частицы происходит в некоторой плоскости P, в которой лежит и начало отсчета декартовой системы координат S (в качестве плоскости P можно взять, например, плоскость xy в системе координат S). Представив радиус-вектор частицы в виде $\vec{r} = r\vec{e}_{\vec{r}}$, где $\vec{e}_{\vec{r}} = (\cos\varphi, \sin\varphi) -$ орт радиуса-вектора $\vec{r}$, r и φ — полярные координаты частицы, вычислим векторы скорости и ускорения:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_{\vec{r}} + r\dot{\varphi}\vec{n}, \quad \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_{\vec{r}} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{n}. \tag{76}$$

Здесь $\vec{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, $\vec{n}\vec{e}_{\vec{r}} = 0$. Работу $dA = \vec{F}d\vec{r}$, совершаемую силой $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ над частицей при ее смещении вдоль траектории на вектор перемещения $d\vec{r} = \vec{v}dt$, разложим на две составляющие — работу при поступательном движении, $dA_{\|} = \vec{F}\vec{v}_{\|}dt$, и работу при вращательном движении, $dA_{\perp} = \vec{F}\vec{v}_{\perp}dt$, где $\vec{v}_{\|} = \dot{r}\vec{e}_{\vec{r}}$, $\vec{v}_{\perp} = r\dot{\varphi}\vec{n}$ (см. (76)). Движение по инерции определим как такое движение, при котором выполняются равенства $dA_{\|} = 0$ и $dA_{\perp} = 0$ или, что то же самое, равенства

$$dA = dA_{\|} + dA_{\perp} = 0 \text{ и } dA_{\perp} = 0. \tag{77}$$

Вычислим величины dA и $dA_{\perp}$:

$$dA = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = dK, \quad K = \frac{m\vec{v}^2}{2},$$
$$dA_\perp = m(\dot{\vec{v}}\vec{n})r\dot{\varphi}dt = m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})r\dot{\varphi}dt = m\left(\dot{\varphi}^2\frac{d}{dt}r^2 + \frac{1}{2}r^2\frac{d}{dt}\dot{\varphi}^2\right)dt. \tag{78}$$

В силу (76) и (78) условия (77) движения частицы по инерции можно представить в форме

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = v_0^2, \quad v_0 = const,$$
$$\dot{\varphi}^2\frac{d}{dt}r^2 + \frac{1}{2}r^2\frac{d}{dt}\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{79}$$

Предполагая, что $r\dot{\varphi} \neq 0$, обе части последнего из равенств (79) разделим и умножим на $r^2\dot{\varphi}^2$. Несложные преобразования дают:

$$\dot{\varphi}^2\frac{d}{dt}r^2 + \frac{1}{2}r^2\frac{d}{dt}\dot{\varphi}^2 = r^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}r^2 + \frac{1}{2\dot{\varphi}^2}\frac{d}{dt}\dot{\varphi}^2\right) = r^2\dot{\varphi}^2\frac{d}{dt}\ln(r^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{80}$$

Из (78) и (80) видно, что равенство $dA_\perp = 0$ может выполниться в двух случаях: 1) при $\dot{\varphi} = 0$ и 2) при $r^2\dot{\varphi} = c,\ c = const$.

В случае 1) имеем: $\varphi = \varphi_0 = const,\ \dot{r} = \pm v_0,\ r = \pm v_0 t + r_0,\ r_0 = const$. Следовательно, этот случай отвечает **поступательному движению частицы по инерции**, когда сила, действующая на частицу, обращается в нуль: $\vec{F} = 0$.

В случае 2) при $\dot{\varphi} \equiv \omega = const \neq 0$ получаем: $r = r_0 = const$. Это случай равномерного вращения частицы по окружности радиуса r_0 с угловой скоростью ω, т. е. **вращательное движение по инерции**. При $\dot{\varphi} \neq const$ величину $\dot{\varphi}$ выражаем из равенства $r^2\dot{\varphi} = c$ и подставляем ее в первое из равенств (79). Простая выкладка дает:

$$\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} = v_0^2 \quad \to \quad \frac{dr}{dt} = \pm\frac{1}{r}\sqrt{v_0^2 r^2 - c^2} \quad \to \quad d\sqrt{v_0^2 r^2 - c^2} = \pm v_0^2 dt \quad \to$$
$$\sqrt{v_0^2 r^2 - c^2} = \pm v_0^2 (t + c_1), \quad c_1 = const. \tag{81}$$

Очевидно, что функция $r = r(t)$, определяемая соотношениями (81), должна иметь минимум при $r = \left|\frac{c}{v_0}\right| \equiv r_0$. Постоянную интегрирования c_1 в (81) определим из условия: $r = r_0$ при $t = t_0$, которое дает: $c_1 = -t_0$. Теперь последнее равенство (81) можно представить в виде:

$$\sqrt{r^2 - r_0^2} = v_0(t - t_0). \tag{82}$$

Здесь мы оставили лишь верхний знак, полагая, что $t \geq t_0$ (см. (81)). В силу (82) искомую функцию $r = r(t)$ можно записать следующим образом:

$$r = r_0\sqrt{1 + \omega_0^2(t - t_0)^2}, \tag{83}$$

где $\omega_0 = v_0 / r_0$. Учитывая, что момент импульса частицы относительно начала координат выражается формулой $\vec{L} = m[\vec{r}\vec{v}] = mr^2\dot{\varphi}\vec{m},\ \vec{m} = [\vec{e}_{\vec{r}}\vec{n}] = (0,0,1)$, т. е. $\vec{L} = L\vec{m} = const$, постоянную c в (81) можно записать в виде: $c = L/m$.

Зависимость $\varphi = \varphi(t)$ определяется из уравнения $\dot{\varphi} = c/r^2$. Используя (83) и начальное условие $\varphi(t_0) = 0$, приходим к формуле

$$\varphi(t) = arctg[\omega_0(t - t_0)]. \tag{84}$$

В силу (84)

$$tg\varphi = \omega_0(t - t_0),\ \sin\varphi = \frac{\omega_0(t - t_0)}{\sqrt{1 + \omega_0^2(t - t_0)^2}},\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2(t - t_0)^2}},\ \dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2(t - t_0)^2}. \tag{85}$$

Отсюда следует, что $\omega_0 = \dot{\varphi}\big|_{t=t_0}$, $L = mr_0^2\omega_0$. С помощью (83) и (85) получается следующее выражение для радиуса-вектора частицы:

$$\vec{r} = r_0(1,0) + v_0(0, t - t_0)\ ,$$

из которого видно, что в рассматриваемом случае частица движется равномерно и прямолинейно, т. е. имеет место поступательная инерция.

Приведенный выше анализ позволяет заключить, что при плоском движении частицы возможна лишь поступательная инерция (при $\dot\varphi = 0$ либо при $\dot\varphi \neq const$) либо вращательная инерция (при $\dot\varphi = const \neq 0,\ r = r_0$). Иными словами, при плоском движении единственным видом криволинейного движения по инерции является вращательная инерция. Подчеркнем, что в случае плоского движения вращательная инерция, в отличие от поступательной, неинвариантна относительно преобразований Галилея, т. е. суперпозиция вращательной и поступательной инерций не является, вообще говоря, криволинейным движением по инерции.

Состояние движения частицы по инерции мы определили из условия, чтобы поступательная и вращательная компоненты работы, совершаемой силой над частицей, взятые в отдельности, обращались в нуль (см. (77)). Такое состояние движения назовем **инерцией в сильном смысле** (или **сильной инерцией**). Требования, налагаемые на движение по инерции, можно ослабить, потребовав, чтобы вместо условий (77), выполнялись условия

$$dA = 0,\ \text{но}\ dA_{\parallel} = -dA_{\perp} \neq 0\,. \qquad (86)$$

Условия (86) определяют, очевидно, такое движение, при котором сила, не производя работы над частицей, перераспределяет ее энергию между поступательной и вращательной степенями свободы. Такое движение назовем **инерцией в слабом смысле** (или **слабой инерцией**).

Пусть, например, $\dot\varphi = \omega = const,\ \varphi = \omega t,\ \dot r \neq 0$. Тогда из первого из равенств (79) выводим: $\dot r = \pm\omega\sqrt{r_0^2 - r^2},\quad r_0 = v_0/\omega$. Отсюда:

$$dr = \pm\frac{\omega dt}{\sqrt{r_0^2 - r^2}},\quad \arcsin\left(\frac{r}{r_0}\right) = \pm\omega t,\quad r = \pm r_0 \sin\omega t. \qquad (87)$$

При выводе последней формулы постоянную интегрирования мы определили из условия: $r = 0$ при $t = 0$. Радиус-вектор частицы описывается формулой

$$\vec{r} = \pm r_0 \sin\omega t\left(\cos\omega t, \sin\omega t\right) = \pm\frac{r_0}{2}(\sin 2\omega t, 1 - \cos 2\omega t)\ . \qquad (88)$$

Приведем формулы силы, момента импульса и компонент работы ($\bar{\vec{r}}$ — среднее по периоду значение радиуса-вектора):

$$\vec{F} = -4m\omega^2(\vec{r} - \bar{\vec{r}}),\quad \bar{\vec{r}} = \pm\frac{r_0}{2}(0,1),\quad \vec{L} = \frac{1}{2}m\omega r_0^2(1 - \cos 2\omega t)\vec{\vec{m}},\quad \vec{\vec{m}} = (0,0,1),$$

$$dA = 0,\quad dA_{\parallel} = -m\omega^3 r_0^2 \sin 2\omega t dt.$$

Как видно из последних соотношений, в случае слабой инерции, в отличие от инерции в сильном смысле, момент импульса частицы не сохраняется и происходит перекачка энергии из поступательной степени свободы во вращательную или наоборот, причем среднее значение за период $T = 2\pi/\omega$ мощности преобразования энергии равно нулю: $\bar N = 0,\quad N = dA_{\parallel}/dt$ (ср. с (70)).

Пользуясь выражением (8), формулу силы в случае плоского движения можно записать так:

$$\vec{F} = m\left[\vec{e}_{\vec r}\frac{d}{dt}(\dot r) + \vec{n}\frac{d}{dt}(r\dot\varphi)\ \right] - m[\vec{v}\vec{\omega}],\quad \vec{\omega} = \dot\varphi\vec{\vec{m}}\,. \qquad (89)$$

Используя (76) и последнюю из формул (87) и полагая, что $\dot\varphi = \omega = const,$ получаем:

$$[\vec{v}\vec{\omega}] = r\omega^2\vec{e}_{\vec r} - \omega\dot r\vec{n},\quad \vec{e}_{\vec r}\frac{d}{dt}(\dot r) + \vec{n}\frac{d}{dt}(r\dot\varphi) = -r\omega^2\vec{e}_{\vec r} + \omega\dot r\vec{n}\,.$$

Учитывая два последних равенства, формулу силы (89) можно представить в виде:

$$\vec{F} = -2m[\vec{v}\vec{\omega}]\,.$$

Обратим внимание на последнюю формулу: получается так, будто масса частицы при слабом движении по инерции удвоилась.

В случае плоского движения частицы по инерции в слабом смысле, считая функцию $r = r(t)$ сложной функцией времени, $r = r(\varphi(t))$, первое из равенств (79) можно записать в виде:

$$\left(\left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 + r^2(\varphi)\right)\dot{\varphi}^2 = v_0^2, \quad \sqrt{\left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 + r^2(\varphi)}\, d\varphi = \pm v_0 dt\,.$$

Полагая, что в последнем равенстве $r = r(\varphi)$ - произвольная заданная функция, и интегрируя его обе части, получаем:

$$g(\varphi) = \pm v_0 t + g(\varphi_0). \qquad (90)$$

Здесь $g(\varphi)$ — первообразная функции $\sqrt{\left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 + r^2(\varphi)}$. Функция $g(\varphi)$ подчиняется начальному условию $g(\varphi) = g(\varphi_0)$ при $t = 0$. Формула (90) определяет в неявной форме зависимость $\varphi = \varphi(t)$, найдя которую мы тем самым определяем и функцию $r = r(t)$. Ввиду того, что $r = r(\varphi)$ — произвольная заданная функция, **движение по инерции в слабом смысле содержит, очевидно, весьма широкий произвол**. Это обусловлено тем, что слабая инерция описывается лишь одним интегралом движения (см. первое из равенств (79)), в который входят две функции — $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, одна из которых может быть произвольной.

7. Суперпозиция вращательного движения частицы по инерции и поступательного движения

Интересно выяснить, существует ли такое движение частицы по инерции, которое является суперпозицией криволинейного движения и поступательного движения с постоянной скоростью. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим классическую частицу, движение которой представляет собой наложение двух движений — произвольного движения, описываемого радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, и движения с постоянной скоростью $\vec{V}_0$. Результирующее движение описывается радиусом-вектором

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(t) + \vec{V}_0 t \equiv \vec{R}. \qquad (91)$$

Введем базисную тройку взаимно ортогональных ортов $\vec{e}_{\vec{r}}, \vec{n}$ и $\vec{m}$, где $\vec{e}_{\vec{r}}$ — орт радиуса-вектора $\vec{r}$, $\vec{r} = r\vec{e}_{\vec{r}}$, и разложим вектор скорости результирующего движения $\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \vec{v} + \vec{V}_0$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, а также векторы $\vec{v}$ и $\vec{V}_0$ на поступательную и вращательные компоненты согласно формулам вида:

$$\vec{V} = \vec{V}_{\|} + \vec{V}_{\perp 1} + \vec{V}_{\perp 2}, \quad \vec{V}_{\|} = (\vec{e}_{\vec{r}}\vec{V})\vec{e}_{\vec{r}}, \quad \vec{V}_{\perp 1} = (\vec{n}\vec{V})\vec{n}, \quad \vec{V}_{\perp 2} = (\vec{m}\vec{V})\vec{m}\,.$$

Аналогично вектор перемещения частицы за время dt, $d\vec{R} = \vec{V}dt$, представим в виде суммы перемещений при поступательном, $d\vec{R}_{\|} = \vec{V}_{\|}dt$, и вращательных, $d\vec{R}_{\perp 1} = \vec{V}_{\perp 1}dt$ и $d\vec{R}_{\perp 2} = \vec{V}_{\perp 2}dt$, движениях.

Криволинейное движение частицы по инерции определим как такое движение, при котором полная работа силы $\vec{F}$, $\vec{F} = m\ddot{\vec{R}}$, действующей на частицу, а также ее вращательные компоненты обращаются в нуль:

$$dA = \vec{F}\vec{V}dt = 0, \quad dA_{\perp 1} = \vec{F}\vec{V}_{\perp 1}dt = 0, \quad dA_{\perp 2} = \vec{F}\vec{V}_{\perp 2}dt = 0. \qquad (92)$$

Из первого из равенств (92) выводим: $\vec{F}\vec{V} = m\dot{\vec{v}}(\vec{v} + \vec{V}_0) = 0$. Следовательно, получается интеграл движения

$$\vec{v}^2 + 2\vec{v}\vec{V}_0 = const\,, \qquad (93)$$

где $\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\vec{\omega}^2$, $\vec{\omega}^2 = \dot{\theta}^2 + (\dot{\varphi}\sin\theta)^2$. Величину $\vec{v}\vec{V}_0$ в (93) удобно представить в виде: $\vec{v}\vec{V}_0 = \frac{d}{dt}\left(r(\vec{e}_{\vec{r}}\vec{V}_0)\right)$.

Используя формулы (1) и (3), последние два равенства (92) удобно записать так:

$$(\vec{n}\vec{F})\left(r\dot{\varphi}\sin\theta+\vec{n}\vec{V}_0\right)=0,\quad (\vec{\tilde{m}}\vec{F})\left(-r\dot{\theta}+\vec{\tilde{m}}\vec{V}_0\right)=0. \qquad (94)$$

Учитывая равенства (см. (1))

$$(\vec{n}\vec{F})=m\left(2\frac{d}{dt}\left(r\dot{\varphi}\sin\theta\right)-r\dot{\varphi}\sin\theta\right),\quad (\vec{\tilde{m}}\vec{F})=m\left(-2\dot{r}\dot{\theta}-r\ddot{\theta}+r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right),$$

легко получить соотношения:

$$r\dot{\varphi}\sin\theta(\vec{n}\vec{F})=\frac{m}{2}\left[r^2\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\sin\theta)^2+2(\dot{\varphi}\sin\theta)^2\frac{d}{dt}r^2+r^2\dot{\varphi}^2\frac{d}{dt}\sin^2\theta\right], \qquad (95)$$

$$-r\dot{\theta}(\vec{\tilde{m}}\vec{F})=\frac{m}{2}\left(r^2\frac{d}{dt}\dot{\theta}^2+2\dot{\theta}^2\frac{d}{dt}r^2-r^2\dot{\varphi}^2\frac{d}{dt}\sin^2\theta\right). \qquad (96)$$

Уравнения (93)-(94) представляют собой систему дифференциальных уравнений, в которой переменные в случае произвольного вектора $\vec{V}_0$ не разделяются.

Рассмотрим простейший случай, когда переменные удается разделить. Пусть вектор скорости $\vec{V}_0$ направлен вдоль оси z: $\vec{V}_0=(0,0,V_0)$. В этом случае $\vec{e}_{\vec{r}}\vec{V}_0=V_0\cos\theta$, $\vec{n}\vec{V}_0=0$, $\vec{\tilde{m}}\vec{V}_0=V_0\sin\theta$. Пусть, далее, $r=r_0=const$, $\theta=\theta_0=const$. Это значит, что вектор $\vec{V}_0$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежит траектория частицы, описываемая радиусом-вектором $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Тогда уравнение (93) преобразуется к виду

$$r_0^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta_0=const,$$

из которого следует, что $\dot{\varphi}=const\neq 0$ (при $\sin\theta_0\neq 0$). Значит, $\omega^2=\dot{\varphi}^2\sin^2\theta_0\equiv\omega_0^2$, $\vec{v}^{\,2}=r_0^2\omega^2\equiv v_0^2$. Первое из уравнений (94) выполняется автоматически, а второе запишется так:

$$\dot{\varphi}^2\sin^2\theta_0\cos\theta_0=0$$

Последние два равенства выполняются одновременно при $\dot{\varphi}=0$ (т. е. при $\omega_0=0$). Это случай покоящейся частицы (т. е. тривиальный случай состояния движения по инерции). Если $\dot{\varphi}\neq 0$, то указанные уравнения совместимы при $\theta_0=\pi/2$, при этом $\dot{\varphi}=\pm\omega_0$. Таким образом, суперпозиция вращательного движения с частотой $\omega_0=v_0/r_0$ и поступательного движения со скоростью $\vec{V}_0$, направленной перпендикулярно к плоскости, в которой происходит вращательное движение, будет криволинейным движением по инерции с угловой скоростью $\dot{\varphi}=\pm\omega_0$. Траекторией движения частицы является винтовая линия, ось которой направлена вдоль оси z. Такое движение естественно назвать **поступательно-вращательной инерцией.**

Рассмотрим решение уравнений (93)-(94) в предположении, что величина V_0 — малый параметр: $V_0\ll|\vec{v}|$. Представим решение в виде разложений по степеням V_0. В линейном приближении имеем:

$$r=r_0+\rho,\quad \theta=\theta_0(t)+\tilde{\theta},\quad \varphi=\varphi_0(t)+\tilde{\varphi}, \qquad (97)$$

где $r_0=const$, $\theta_0(t)$ и $\varphi_0(t)$ — решение задачи о криволинейном движении частицы по инерции в нулевом приближении, т. е. при $V_0=0$; ρ, $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\varphi}$ — поправки порядка V_0 к основным величинам. Примем, что в нулевом приближении сила $\vec{F}$, действующая на частицу, направлена вдоль радиуса-вектора, т. е. $\vec{F}_0\sim\vec{e}_{\vec{r}}$. Тогда $\vec{n}\vec{F}_0=0$ и $\vec{\tilde{m}}\vec{F}_0=0$ и, значит, в линейном по V_0 приближении можно положить:

$$(\vec{n}\vec{F})(\vec{n}\vec{V}_0)=(\vec{n}\vec{F}_0)(\vec{n}\vec{V}_0)=0,\quad (\vec{\tilde{m}}\vec{F})(\vec{\tilde{m}}\vec{V}_0)=(\vec{\tilde{m}}\vec{F}_0)(\vec{\tilde{m}}\vec{V}_0)=0.$$

Следовательно, в левых частях равенств (94) исчезают члены, содержащие явно V_0, и эти равенства, принимая во внимание (95) и (96), можно преобразовать к виду:

$$r^2\sin^2\theta\frac{d}{dt}\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}^2\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta)=0,\quad r^2\frac{d}{dt}\omega^2+2\omega^2\frac{d}{dt}r^2=0, \qquad (98)$$

где $\vec{\omega}^2=\dot{\theta}^2+(\dot{\varphi}\sin\theta)^2$. Из уравнений (98) вытекают интегралы движения:

$$\dot{\varphi} r^2 \sin^2\theta = c_1 = const, \quad r^4\omega^2 = c_2 = const. \tag{99}$$

Задача о движении по инерции сводится, таким образом, к решению системы уравнений, состоящей из уравнений (99) и уравнения (93), которое удобно записать в следующей форме:

$$\dot{r}^2 + r^2\vec{\omega}^2 + 2\frac{d}{dt}(r\vec{e}_{\vec{r}}\vec{V}_0) = c_0 = const\,. \tag{100}$$

Приведем радиус-вектор и основные величины, характеризующие движение частицы в нулевом приближении (см. раздел 3, формулы (41) — (44); в (41) фиксируем знак + и полагаем $L_{20} > 0$):

$$\vec{r}_0 = r_0(\cos\alpha, \sqrt{1-b^2}\sin\alpha, b\sin\alpha), \quad \alpha = \omega_0 t,$$

$$\cos\theta_0(t) = b\sin\alpha, \quad \sin\theta_0(t) = \sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}, \quad \sin\varphi_0(t) = \frac{\sqrt{1-b^2}\sin\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}}, \tag{101}$$

$$\cos\varphi_0(t) = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}}, \quad \dot{\theta}_0(t) = -\frac{b\omega_0\cos\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}}, \quad \dot{\varphi}_0(t) = \frac{\sqrt{1-b^2}\,\omega_0}{1-b^2\sin^2\alpha}.$$

В качестве постоянных c_i, $i = 0,1,2,$ входящих в (99) и (100), используем соответствующие величины нулевого приближения:

$$c_0 = r_0^2\omega_0^2 = v_0^2, \quad c_1 = \dot{\varphi}_0(t) r_0^2 \sin^2\theta_0(t) = \omega_0 r_0^2\sqrt{1-b^2}, \quad c_2 = r_0^4\omega_0^2\ . \tag{102}$$

Далее полагаем, что $\vec{V}_0 = (0,0,V_0)$, т. е. $\vec{e}_{\vec{r}}\vec{V}_0 = V_0\cos\theta$.

Для упрощения вычислений удобно с помощью первого из уравнений (99) вначале исключить $\dot{\varphi}$ из двух других уравнений. Величина ω^2 в линейном по V_0 приближении выражается формулой

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\dot{\tilde{\theta}}\dot{\theta}_0(t) - \frac{2(1-b^2)\omega_0^2}{\sin^2\theta_0(t)}\left(\frac{2\rho}{r_0} + \tilde{\theta} ctg\theta_0(t)\right). \tag{103}$$

Исключая затем ω^2 из второго из уравнений (99) и уравнения (100), получаем следующее выражение для ρ:

$$\rho = -\frac{1}{\omega_0^2}V_0\,\dot{\theta}_0(t)\sin\theta_0(t) = \frac{bV_0}{\omega_0}\cos\alpha\,. \tag{104}$$

Уравнения для поправок к угловым переменным имеют вид:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\tilde{\theta}\frac{\omega_0(1-b^2)\sin\alpha}{(1-b^2\sin^2\alpha)\cos\alpha} + \frac{2b^2V_0}{r_0}\frac{\cos^2\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}},$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = -2\frac{\omega_0 b\sqrt{1-b^2}}{1-b^2\sin^2\alpha}\left(\frac{V_0}{r_0\omega_0}\cos\alpha + \tilde{\theta}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}}\right). \tag{105}$$

Решение первого из уравнений (105) ищем, как обычно, в виде $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{одн} + \tilde{\theta}_ч$, где $\tilde{\theta}_{одн}$ - общее решение однородного уравнения, $\tilde{\theta}_ч = \tilde{\theta}_{одн}\chi$ — частное решение неоднородного уравнения, функция χ подчиняется уравнению

$$\tilde{\theta}_{одн}\dot{\chi} = \frac{2b^2V_0}{r_0}\frac{\cos^2\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}}\,. \tag{106}$$

Вводя обозначение $\cos\alpha = x$, уравнение для $\tilde{\theta}_{одн}$ можно записать в виде:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{одн}}{\tilde{\theta}_{одн}} = (1-b^2)\frac{dx}{x(1-b^2+b^2x^2)} = \left(\frac{1}{x} - \frac{b^2x}{1-b^2+b^2x^2}\right)dx\,.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$\ln\tilde{\theta}_{одн} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1-b^2+b^2x^2) + const,$$
$$\tilde{\theta}_{одн} = c\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}}, \quad \alpha=\omega_0 t, \quad c = const. \tag{107}$$

Подстановка $\tilde{\theta}_{одн}$ из (107) в (106) приводит к уравнению: $\dot{\chi}=\frac{2b^2V_0}{cr_0}\cos\alpha$, решение которого дается формулой $\chi=\frac{2b^2V_0}{cr_0\omega_0}\sin\alpha$. Учитывая последнюю формулу, а также равенства (106) и (107), выражение для $\tilde{\theta}$ можно записать следующим образом:

$$\tilde{\theta}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-b^2\sin^2\alpha}}\left(\frac{2b^2V_0}{r_0\omega_0}\sin\alpha + c\right). \tag{108}$$

Постоянную интегрирования c определим из условия: $\tilde{\theta}=0$ при $t=0$, которое дает: $c=0$. Указанное условие вытекает из требования, чтобы величина $\tilde{\theta}$ обращалась в нуль при $V_0=0$. Подстановка $\tilde{\theta}$ (108) во второе из равенств (105) приводит к уравнению

$$\dot{\tilde{\varphi}}=-2\frac{V_0 b\sqrt{1-b^2}}{r_0}\cos\alpha\frac{1+b^2\sin^2\alpha}{(1-b^2\sin^2\alpha)^2}. \tag{109}$$

Используя интеграл $\int\frac{1+b^2x^2}{(1-b^2x^2)^2}dx=\frac{x}{1-b^2x^2}+const,$ получаем решение уравнения (109), подчиняющееся условию $\tilde{\varphi}=0$ при $t=0$:

$$\tilde{\varphi}=-2\frac{V_0 b\sqrt{1-b^2}}{r_0\omega_0}\frac{\sin\alpha}{1-b^2\sin^2\alpha}. \tag{110}$$

Как видно из (97), (104), (108) и (110), если сферическая поверхность, по которой частица движется по инерции, перемещается в пространстве с постоянной скоростью $\vec{V}_0$, то состояние движения частицы по инерции изменяется следующим образом: параметры этого движения r, θ, φ изменяются от исходных значений $r_0, \theta_0(t), \varphi_0(t)$, приобретая поправки, осциллирующие во времени с амплитудой осцилляций, пропорциональной V_0. Этот результат подтверждает сделанный ранее вывод о том, что **существование в природе сил чисто кинематического характера приводит к невыполнению принципа относительности**.

Механика Ньютона является **жесткой схемой** описания движения частиц, в которой предполагается, что единственной силой, действующей на частицу, является внешняя сила — сила, действующая со стороны окружения частицы, и постулируются принцип инерции Галилея и закон всемирного тяготения, фиксирующий форму функциональной зависимости силы взаимодействия между частицами от их координат. Назначение закона всемирного тяготения как раз и состоит в том, чтобы обеспечить существование силы, действующей на частицу со стороны ее окружения.

Наши исследования показывают, что существует обширный класс движений, не учитываемых ньютоновской схемой механики, — ускоренные (криволинейные) движения по инерции, для поддержания которых не требуется каких-либо энергетических затрат. Согласно полученным результатам, состояние движения частицы определяется не только внешними силами, но и силами, связанными с неоднородностью пространства. Неоднородность пространства приводит к неустойчивости поступательного (т. е. равномерного и прямолинейного) движения: достаточно сколь угодно малого воздействия на частицу, чтобы движение частицы стало криволинейным, и в игру немедленно вступают силы кинематической природы, порождаемые криволинейным движением частицы и действующие на саму частицу.

8. Криволинейное движение по инерции системы двух частиц

Теорию криволинейного движения частицы по инерции, представленную в разделах (2) и (3), обобщим на случай двухчастичной системы. Через $m_i, \vec{r}_i, \vec{p}_i$ обозначим, соответственно, массу, радиус-вектор, импульс частицы i $(i=1,2)$, а через $\vec{F}_i$, $\vec{F}_i = d\vec{p}_i/dt$, — силу, действующую на частицу i, в некоторой инерциальной системе отсчета S. Введем радиус-вектор $\vec{R}_C$ центра масс C рассматриваемой системы двух частиц, $\vec{R}_C = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$, и перейдем к системе отсчета S', начало отсчета координат которой O' совпадает с центром масс C. Векторы, описывающие частицы в системе отсчета S', отмечаем штрихом ($\vec{r}_i', \vec{p}_i', \vec{F}_i'$). Учитывая, что $\vec{r}_i = \vec{R}_C + \vec{r}_i'$ $(i=1,2)$, и используя условие замкнутости рассматриваемой двухчастичной системы, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, получаем следующие соотношения:

$$\vec{r}_1' = \frac{\mu}{m_1}\vec{R}, \quad \vec{r}_2' = -\frac{\mu}{m_2}\vec{R}, \quad \vec{F}_i' = m_i\ddot{\vec{r}}_i' = \vec{F}_i, (i=1,2), \quad \vec{F}_1' = \mu\ddot{\vec{R}}, \quad \vec{F}_2' = -\mu\ddot{\vec{R}}, \tag{111}$$

где $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1' - \vec{r}_2'$, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса двухчастичной системы.

В соответствии с (111) импульсы частиц в системе отсчета S', $\vec{p}_i' = m_i\dot{\vec{r}}_i'$, моменты импульсов и сил, $\vec{L}_i' = [\vec{r}_i'\vec{p}_i']$ и $\vec{M}_i' = [\vec{r}_i'\vec{F}_i']$, выражаются формулами:

$$\vec{p}_1' = \mu\dot{\vec{R}}, \quad \vec{p}_2' = -\mu\dot{\vec{R}}, \quad \vec{L}_i' = \frac{\mu^2}{m_i}[\vec{R}\dot{\vec{R}}], \quad \vec{M}_i' = \frac{\mu^2}{m_i}[\vec{R}\ddot{\vec{R}}]. \tag{112}$$

Результирующие импульсы и моменты имеют вид:

$$\vec{P}' \equiv \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0, \quad \vec{L}' \equiv \vec{L}_1' + \vec{L}_2' = \mu[\vec{R}\dot{\vec{R}}], \quad \vec{M}' \equiv \vec{M}_1' + \vec{M}_2' = \mu[\vec{R}\ddot{\vec{R}}]. \tag{113}$$

Из (112) и (113) вытекают равенства: $\vec{L}_i' = \dfrac{\mu}{m_i}\vec{L}'$, $\vec{M}_i' = \dfrac{\mu}{m_i}\vec{M}'$, $\dfrac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'$.

Обозначая через R, θ_R, φ_R сферические координаты радиуса-вектора $\vec{R}$, используем следующие представления, аналогичные (1) — (3):

$$\begin{gathered} \vec{R} = R\vec{e}_R, \quad \vec{V} = \dot{\vec{R}} = \vec{V}_{\|} + \vec{V}_{\perp 1} + \vec{V}_{\perp 2}, \quad \vec{V}_{\|} = \dot{R}\,\vec{e}_R, \quad \vec{V}_{\perp 1} = R\dot{\varphi}_R \sin\theta_R\, \vec{n}_R, \quad \vec{V}_{\perp 2} = -R\dot{\theta}_R\, \vec{m}_R, \\ \dot{\vec{V}} = \left(\ddot{R} - R\vec{\omega}_R^2\right)\vec{e}_R + \left[2\frac{d}{dt}\left(R\,\dot{\varphi}_R \sin\theta_R\right) - R\,\ddot{\varphi}_R \sin\theta_R\right]\vec{n}_R + \left(-2\dot{R}\dot{\theta}_R - R\ddot{\theta}_R + R\dot{\varphi}_R^2 \sin\theta_R \cos\theta_R\right)\vec{m}_R, \end{gathered} \tag{114}$$

где $\vec{V}$ и $\dot{\vec{V}}$ — относительные скорость и ускорение двухчастичной системы; $\vec{V}_{\|}$, $\vec{V}_{\perp 1}$, $\vec{V}_{\perp 2}$ — поступательная и вращательные компоненты вектора $\vec{V}$; $\vec{e}_R$, $\vec{n}_R$, $\vec{m}_R$ - базисная тройка взаимно ортогональных ортов:

$$\begin{gathered} \vec{e}_R = (\sin\theta_R \cos\varphi_R,\ \sin\theta_R \sin\varphi_R,\ \cos\theta_R), \quad \vec{n}_R = (-\sin\varphi_R, \cos\varphi_R, 0), \\ \vec{m}_R = (-\cos\theta_R \cos\varphi_R,\ -\cos\theta_R \sin\varphi_R,\ \sin\theta_R). \end{gathered}$$

Вычислим работу $dA_i = \vec{F}_i' d\vec{r}_i'$, $i=1,2$, совершаемую силами, действующими на частицы, результирующую работу $dA = dA_1 + dA_2$ и компоненты работы, отвечающие поступательному и вращательному движениям, $dA_{i\alpha} = \vec{F}_i' d\vec{r}_{i\alpha}'$, $dA_\alpha = dA_{1\alpha} + dA_{2\alpha}$, $\alpha = \|, \perp 1, \perp 2$. Используя соотношения (111) и (114), получаем:

$$\begin{gathered} dA_i = \frac{\mu}{m_i}dA, \quad dA = \mu\dot{\vec{V}}\vec{V}dt = d\left(\frac{\mu\vec{V}^2}{2}\right), \\ dA_{i\alpha} = \frac{\mu}{m_i}dA_\alpha, \quad dA_\alpha = \mu\dot{\vec{V}}\vec{V}_\alpha dt. \end{gathered} \tag{115}$$

Здесь компоненты $\vec{V}_\alpha$ вектора скорости определены формулами (114).

Криволинейное движение по инерции двухчастичной системы определим как такое движение, при котором выполняются условия (ср. с условиями (12))

$$dA = 0, \quad dA_{\perp 1} = 0, \quad dA_{\perp} = dA_{\perp 1} + dA_{\perp 2} = 0 . \tag{116}$$

С помощью соотношений (111), (114) и (115) указанные условия можно преобразовать к следующему виду (см. равенства (15)):

$$\begin{aligned} &\dot{R}^2 + \omega_R^2 R^2 = V_0^2, \quad V_0 = const, \\ &\frac{1}{2} R^2 \sin^2\theta_R \frac{d}{dt}\dot{\varphi}_R^2 + \dot{\varphi}_R^2 \frac{d}{dt}\left(R^2 \sin^2\theta_R\right) = 0, \\ &\frac{1}{2} R^2 \frac{d}{dt}\omega_R^2 + \omega_R^2 \frac{d}{dt} R^2 = 0, \end{aligned} \tag{117}$$

где $\vec{\omega}_R = \dot{\theta}_R \vec{n}_R + \dot{\varphi}_R \sin\theta_R \vec{\tilde{m}}$ — вектор угловой скорости, $\omega_R^2 = \dot{\theta}_R^2 + (\dot{\varphi}_R \sin\theta_R)^2$.

Исследуем условия (117) при $R = R_0 = const$. Первое из условий (117) дает:

$$\omega_R^2 = const \equiv \omega_0^2, \quad \omega_0 = V_0 / R_0 . \tag{118}$$

При этом последнее из условий (117) выполняется автоматически.

Если $\dot{\varphi}_R = 0$, то второе из условий (117) автоматически выполняется, а соотношение (118) дает: $\dot{\theta}_R^2 = \omega_0^2$. Следовательно, получается движение, относящееся к группе 1 (см. (22)):

$$\theta_R = \pm\omega_0 t + \theta_0, \quad \varphi_R = \varphi_0, \quad \theta_0, \varphi_0 = const . \tag{119}$$

Приведем формулы для векторов, описывающих движение системы двух частиц:

$$\vec{R} = R_0 \vec{e}_R, \quad \vec{V} = \mp\omega_0 R_0 \vec{\tilde{m}}_R, \quad \vec{\omega}_R = \pm\omega_0 \vec{n}_R, \quad \vec{L}' = \mu R_0^2 \vec{\omega}_R = const, \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -\mu\omega_0^2 \vec{R} . \tag{120}$$

Выражения (119) и (120) описывают **вращательное движение по инерции**. Траекториями движения частиц являются концентрические окружности с радиусами $\mu R_0 / m_1 \equiv R_1$ и $\mu R_0 / m_2 \equiv R_2$, лежащие в плоскости, проходящей через ось z под углом φ_0 к координатной плоскости xz; центр окружностей совпадает с центром масс системы частиц. Частицы движутся с постоянной угловой скоростью ω_0, и расстояние между ними составляет R_0.

Если $\dot{\varphi}_R = const \equiv \omega_1 \neq 0$, то из второго из условий (117) следует, что $\theta_R = const \equiv \theta_0$. Равенство (118) определяет величину ω_1: $\omega_1 = \pm\omega_0 / \sin\theta_0$. Следовательно, угловые переменные выражаются следующим образом:

$$\theta_R = \theta_0, \quad \varphi_R = \omega_2 t + \varphi_0, \quad \theta_0, \varphi_0 = const , \tag{121}$$

т. е. движение относится к группе 2 (см. равенства (24)). Движение частиц описывается векторами

$$\vec{R} = R_0 \vec{e}_R, \quad \vec{V} = \pm\omega_0 R_0 \vec{n}_R, \quad \vec{\omega}_R = \pm\omega_0 \vec{\tilde{m}}_R, \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -\mu\omega_0^2 R_0 \frac{1}{\sin\theta_0}(\cos\varphi_R, \sin\varphi_R, 0) . \tag{122}$$

Как видно из (121) и (122), снова имеем **вращательное движение по инерции**. Частицы с массами m_1 и m_2 движутся по окружностям с радиусами $\mu R_0 \sin\theta_0 / m_1$ и $\mu R_0 \sin\theta_0 / m_2$, соответственно, лежащим в параллельных плоскостях, перпендикулярных к оси z, по разные стороны от центра масс; их центры совпадают с центром масс двухчастичной системы. Силы, действующие на частицы, направлены от частиц перпендикулярно оси вращения, которая совпадает с осью z. При $\theta_0 = \pi/2$ траектории движения частиц лежат в одной плоскости, проходящей через центр масс.

Подчеркнем, что между рассмотренными выше вращательными движениями частиц имеется весьма существенное различие. Из сравнения выражений (120) и (122) для сил, действующих между частицами, видно, что для движений, относящихся к группе 1, эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей частицы и проходящей через центр масс системы, а для движений из группы 2 они не направлены вдоль указанной прямой, будучи перпендикулярными к оси z.

При $\dot{\varphi}_R \neq const$ из второго и третьего равенств (117) следуют интегралы движения (ср. с

(20))

$$\dot{\varphi}_R R_0^2 \sin^2\theta_R = c_1, \quad c_1 = const,$$
$$\vec{\omega}_R^2 = \dot{\theta}_R^2 + (\dot{\varphi}_R \sin\theta_R)^2 = const \equiv \omega_0^2. \tag{123}$$

Исключая $\dot{\varphi}_R$ из интегралов движения (123), получаем уравнение, аналогичное (28),

$$\dot{\theta}_R = \pm\frac{\omega_0}{\sin\theta_R}\sqrt{b^2 - \cos^2\theta_R}, \quad b^2 = 1 - \left(\frac{\mu c_1}{L'}\right)^2, \tag{124}$$

где $L' = \left|\vec{L}'\right|$, $\vec{L}'$ — полный момент импульса двухчастичной системы, определенный в (113).

Решение уравнения (124), подчиняющееся начальному условию $\theta_R = \theta_0$ при $t = t_0$, дается формулами (32), в которых нужно выполнить замену $\theta \to \theta_R$. Подставляя это решение в первый из интегралов движения (123), приходим к уравнению для φ_R, аналогичному уравнению для φ (см. уравнение (33)). Формулы для угловых переменных θ_R и φ_R, удовлетворяющих начальному условию $\theta_R = \theta_0 = \pi/2, \quad \varphi_R = \varphi_0 = 0$ при $t = t_0 = 0$, имеют вид (см. (41)):

$$\cos\theta_R = \mp b\sin\alpha, \quad \varphi_R = \frac{L_{20}}{|L_{20}|} arctg\left(\sqrt{1-b^2}\, tg\alpha\right), \quad \alpha = \omega_0 t. \tag{125}$$

Постоянную c_1, входящую в (123) и (124), зафиксируем тем же способом, что и в разделе 3, выразив ее через компоненту вектора $\vec{L}'$:

$$c_1 = \frac{L_{20}\sin\theta_0}{\mu}, \quad \theta_0 = \theta_R(t_0), \quad L_{20} = L_2(t_0),$$
$$\vec{L}' = L_1\vec{n}_R + L_2\vec{\bar{m}}_R, \quad L_1 = \mu R_0^2\dot{\theta}_R \equiv L_1(t), \quad L_2 = \mu R_0^2\dot{\varphi}_R \sin\theta_R \equiv L_2(t), \quad (L')^2 = L_1^2 + L_2^2 = const.$$

Учитывая результаты раздела 3, движение по инерции системы двух частиц, описываемое равенствами (125), можно охарактеризовать следующим образом. Частицы движутся по сферическим поверхностям радиусов $R_1 = \mu R_0/m_1$ и $R_2 = \mu R_0/m_2$, центры сфер совпадают с центром масс системы. Частицы движутся так, что расстояние между ними сохраняется: $R = R_0$. При $m_2 > m_1$ сферическая поверхность, по которой движется частица 2, находится внутри области, охватываемой сферой частицы 1. При $b^2 << 1$ движение каждой частицы представляет собой наложение двух движений — вращательного движения по инерции и колебательного движения, состоящего в том, что угловая переменная θ_R осциллирует по закону: $\theta_R = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon, \ \varepsilon = \pm b\sin(\omega_0 t)$. Силы притяжения, действующие между частицами при таком движении (см. (45) и (46)),

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -\mu\omega_0^2\vec{R} = \mu[\vec{V}(-\vec{\omega}_R)], \quad \omega_0 = \frac{V_0}{R_0}, \quad \vec{\omega}_R = \frac{\vec{L}'}{\mu R_0^2},$$

равны по величине, противоположны по направлению и направлены вдоль прямой, соединяющей частицы. Нетрудно проверить, что последние формулы для сил остаются справедливыми при начальном условии $\theta_R = \theta_0$, $\varphi_R = \varphi_0$ при $t = t_0 = 0$ с произвольными значениями и . Это следует из общих выражений (32) и (36), равенства $[\vec{V}\vec{\omega}_{\vec{R}}] = \vec{\omega}_R^2\vec{R}$, справедливого при $R = R_0 = const$, и последнего из интегралов движения (123).

9. Ускоренное движение частицы по инерции как движение механического диполя

Рассмотрим движение частицы массой m по криволинейной траектории. Как отмечалось в разделе 5, при наличии частицы в пространстве имеются две выделенные точки: точка, в которой находится частица, и центр кривизны траектории движения, т. е. пространство становится неоднородным. Обозначим через $\vec{R}$ радиус-вектор частицы, проведенный из центра кривизны траектории. Движение частицы можно описать вектором $m\vec{R} \equiv \vec{d}$. Векторы $\dot{\vec{d}}$, $\ddot{\vec{d}}$, $[\vec{R}\dot{\vec{d}}]$ и

$[\vec{R}\ddot{\vec{d}}]$ представляют собой, соответственно, импульс частицы, действующую на частицу силу, момент импульса и момент силы относительно центра кривизны. Если траекторией движения частицы является окружность и $\vec{\omega}$ — угловая скорость частицы, то на частицу действует сила $\vec{F}=\ddot{\vec{d}}=-m\omega^2\vec{R}$. Учитывая известное соотношение, связывающее вектор скорости частицы $\vec{V}=\dot{\vec{R}}$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$, $\vec{V}=[\vec{\omega}\vec{R}]$, и ортогональность векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$, получаем равенство $[\vec{\omega}\vec{V}]=-\omega^2\vec{R}$. Из сравнения этого равенства с последней формулой силы вытекает следующее представление силы, действующей на частицу: $\vec{F}=m[\vec{V}(-\vec{\omega})]$. Мы получаем силу Лоренца, в которой электрический заряд частицы заменяется ее массой, а роль магнитной индукции играет величина $-\vec{\omega}$.

Приведенные рассуждения наводят на мысль о том, что при описании ускоренного движения частицы массой m по инерции можно воспользоваться аналогией с электродинамикой. **Система, состоящая из частицы и центра кривизны траектории, по которой частица движется, аналогична электрическому диполю.** Эта система, которую естественно назвать **механическим диполем**, соответствующим рассматриваемой частице, описывается вектором $\vec{d}=m\vec{R}$, аналогичным электрическому дипольному моменту. По аналогии с электрическим дипольным моментом, величину $\vec{d}$ естественно назвать **механическим дипольным моментом** частицы массой m, движущейся по дуге радиуса R.

Теперь обратимся к двухчастичной системе, состоящей из частиц с массами m_1 и m_2 (для определенности, считаем, что $m_2>m_1$) и совершающей вращательное движение по инерции. Согласно [5], в системе центра масс, начало координат которой совпадает с центром масс двухчастичной системы, радиусы-векторы частиц имеют вид:

$$\vec{r}_1=\frac{\mu}{m_1}\vec{R}\equiv\vec{R}_1,\quad \vec{r}_2=-\frac{\mu}{m_2}\vec{R}\equiv\vec{R}_2,$$

где $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$ — приведенная масса двух частиц, $\vec{R}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ — радиус-вектор частицы m_1, проведенный из точки нахождения частицы m_2, R_1 и R_2 — радиусы окружностей, по которым движутся частицы, находящиеся в состоянии вращательной инерции. Очевидно, что рассматриваемую систему двух частиц можно представить себе как совокупность двух механических диполей с дипольными моментами $m_1\vec{r}_1\equiv\vec{d}_1$ и $m_2\vec{r}_2\equiv\vec{d}_2$. Дипольные моменты определяют, как и в случае одной частицы, импульсы частиц, действующие на частицы силы и моменты импульсов и сил. В частности, силы определяются формулами:

$$\vec{F}_1=\ddot{\vec{d}}_1=\mu\ddot{\vec{R}},\quad \vec{F}_2=\ddot{\vec{d}}_2=-\mu\ddot{\vec{R}},\quad \vec{F}_1+\vec{F}_2=0.$$

Пусть $m_2\to\infty$, т. е. вторую частицу можно считать неподвижной и находящейся в центре масс. Частица массой m_1 $(m_1<\infty)$ и центр масс образуют механический диполь с дипольным моментом $\vec{d}_1=m_1\vec{R}_1$. При движении частицы m_1 на эту частицу действует сила $\vec{F}_1$, а на почти неподвижную частицу, лежащую в центре масс, действует сила $\vec{F}_2$, равная по величине силе $\vec{F}_1$ и противоположно ей направленная.

На основании изложенного можно предсказать следующий эффект. Представим себе частицу, движущуюся над поверхностью некоторого массивного тела по дуге, центр кривизны которой лежит в некоторой точке P на поверхности или внутри тела. Тогда между частицей и точкой P возникнет пара сил: сила $\vec{F}_1$, приложенная к частице, и сила $\vec{F}_2=-\vec{F}_1$, приложенная к телу в точке P. Этот эффект объясняет, очевидно, поступательное движение центра масс инерциоида, возникающее при вращении входящих в инерциоид грузов (см., например, [17]).

10. Заключение. Ускоренные движения по инерции, гравитация и аномальные явления

Успех любого научного исследования определяется в значительной мере выбором метода исследования. Может случиться, что используемый метод исследования не улавливает наиболее характерные особенности изучаемого явления, и тогда исследование обречено на неудачу. Несмотря на усилия огромной армии исследователей, пытавшихся в течение более трех веков разгадать тайну гравитации, физическая природа гравитации оставалась неизвестной до сих пор. Не указывает ли этот факт на то обстоятельство, что механика как метод исследования гравитации, включая ее релятивистскую модификацию — общую теорию относительности (ОТО), в принципе неспособна объяснить явление тяготения вследствие наличия в ее основах некоторого существенного изъяна? Подобным изъяном может быть неполнота ньютоновской схемы механики, устранение которой позволило бы понять физическую причину гравитации. Проблема неполноты законов Ньютона уже давно обсуждается в литературе многими исследователями (см. [1-4]). И хотя до сих пор не было предложено каких-либо путей ее решения, анализ неполноты и поиск способов расширения механики остаются одной из актуальнейших задач теоретической физики.

В механике Ньютона рассматривается единственный вид движения по инерции — равномерное и прямолинейное движение тела, не подверженного действию внешней силы. Такой вид движения естественно назвать **поступательной инерцией**. Однако движение этого типа реализуется в природе лишь в ограниченных областях пространства и, значит, в течение ограниченных промежутков времени. Движение практически всех тел в наблюдаемой части Вселенной представляет собой суперпозицию вращательного и поступательного движений.

Главный результат данной работы состоит в том, что в ней указан конкретный способ устранения неполноты ньютоновской схемы описания динамики — способ, связанный с существенным расширением понятия движения по инерции. Исследования, результаты которых изложены в [5] и в настоящей работе, показывают, что в общепринятой схеме механики выпал из поля зрения обширный класс движений, играющих в природе ключевую роль и связанных с силами чисто кинематического происхождения. Речь идет об ускоренных (криволинейных) движениях по инерции, которые обеспечивают устойчивость реальных физических систем, и о силах, которые порождаются ускоренно движущимися частицами и одновременно действуют на них.

В работе [5] доказано существование качественно нового вида движения по инерции — **вращательной инерции**. В отличие от поступательной инерции, вращательная может продолжаться сколь угодно долго. Но если, покинув пределы плоскости, обратиться к движениям по неплоским траекториям, то класс движений по инерции неизмеримо расширяется. Возникают, в частности, **вращательно-поступательная инерция** с траекторией движения частицы в виде винтовой линии, **вращательно-колебательная инерция** с траекторией движения, лежащей на поверхности шара, и др. Все эти виды движения по инерции, происходящие по криволинейным траекториям, т. е. с ускорением частицы, естественно назвать **криволинейной инерцией**.

На исключительно важную роль, какую играет в природе вращательная инерция, впервые указал А. Головнев, основываясь на наиболее общих законах природы — законах диалектики. Как отмечается в [10] (с.84), движение любого небесного тела является наложением поступательной и вращательной инерций, и результирующих «инерционных движений может быть множество».

Чтобы уяснить, в чем состоит принципиальное отличие ньютоновской схемы механики от новой схемы, контуры которой постепенно вырисовываются в ходе наших исследований, обратимся к системе, состоящей из частиц 1 и 2. Сравним поведение двух частиц, связанных между собой вращательным движением по инерции, с поведением двухчастичной системы, частицы которой взаимодействуют между собой в соответствии с законом всемирного тяготения.

Вращательное движение двух частиц по инерции мы определяем как такое движение, в котором выполняются условие замкнутости системы и требование, чтобы силы, действующие на частицы и отвечающие различным степеням свободы системы, не совершали работы над частицами при их перемещении. Указанные условия приводят к появлению сил притяжения между частицами, каждая из этих сил обусловлена криволинейностью траектории движения, т. е. имеет чисто кинематическое происхождение. Отметим, что при таком подходе движение частиц не управляется уравнениями движения, т. е. **силовое воздействие на частицы не является причиной их движения по криволинейной траектории. Скорее, наоборот, силы, дей-**

ствующие на частицы, возникают как следствие криволинейности траектории при движении частиц по инерции.

В ньютоновской схеме механики картина движения частиц совершенно иная. Эта схема опирается на гипотезу, что каждая частица, независимо от ее состояния движения, порождает в окружающем пространстве силовое поле, которое не действует на порождающую его частицу, но действует на любую другую частицу, отделенную от исходной частицы некоторым расстоянием. Так, частица 1 создает силовое поле, которое не действует на частицу 1, но действует на частицу 2. Аналогично обстоит дело и с частицей 2, силовое поле которой действует на частицу 1, не оказывая никакого влияния на частицу 2. Действие силового поля на каждую частицу является внешним воздействием по отношению к частице, причем величина и направление действующей на частицу силы определяются законом всемирного тяготения, а движение частицы описывается вторым законом Ньютона, в который входит упомянутая выше сила.

Как видим, ньютоновская схема механики, в отличие от рассматриваемой здесь схемы описания, характеризуется тем, что в этой схеме причиной криволинейного движения частицы считается внешнее силовое воздействие на частицу, которое при рассмотрении тяготения задается феноменологически с помощью закона всемирного тяготения. Подчеркнем, что в механике Ньютона внешняя сила — единственный вид сил, которые могут действовать на частицу и влиять на ее движение через уравнения движения; вследствие этого, поступательная инерция оказывается единственным видом движения по инерции, рассматриваемым в общепринятом подходе. В этом состоит главное различие между обсуждаемыми здесь подходами.

Существенно, что **в развиваемом подходе внешняя сила вызывает лишь отклонение частицы от состояния ускоренного движения по инерции. Само же движение по инерции определяется не уравнениями движения, а кинематикой — из условия, чтобы работа, производимая силой над частицей при ее перемещении, обращалась в нуль**. Интересно, что расширение схемы механики за счет включения ускоренных движений по инерции приводит к невыполнению принципа относительности уже в нерелятивистском случае даже для одной частицы (ср. с релятивистской теорией [11]).

Открытие ускоренных движений частиц по инерции и включение их в схему механики позволяет описать и объяснить целый ряд аномальных явлений (АЯ), которые не поддаются объяснению с точки зрения существующих ныне физических представлений. К такого рода АЯ относятся неопознанные летающие объекты (НЛО) и неизвестные подводные объекты (НПО), демонстрирующие недостижимые для современной техники возможности: сверхвысокие скорости как в воздухе, так и под водой; стремительный вертикальный взлет на большие высоты при горизонтальном положении объекта; высокие скорости на больших глубинах погружения; способности почти мгновенно изменять направление движения на высоких скоростях и легко переходить из водной среды в воздушную и наоборот и др. (см.[12]). Указанные выше особенности поведения НЛО и НПО обусловлены, очевидно, тем, что в жидких и газообразных средах могут возникать при определенных условиях такие вихревые структуры, которые движутся ускоренно по инерции. Наблюдение объектов с аномальными свойствами как раз и подтверждает сделанный нами вывод о возможности существования в природе ускоренных движений тел по инерции, т. е. движений, не требующих для своего осуществления каких-либо энергетических затрат.

Следует подчеркнуть, что **ньютоновская схема механики неспособна объяснить как аномальные явления, так и гравитацию по той причине, что в этой схеме не учтены ускоренные движения материальных тел по инерции, обеспечивающие высокую стабильность реальных физических систем**.

Ускоренные движения частиц по инерции, несомненно, играют важную роль и в электромагнитных процессах. Поэтому разработка электродинамики, учитывающей новое понимание движения по инерции, — актуальнейшая задача теоретической физики. Как подчеркивает П. Жилин [4], «Первоочередной задачей является ответ на вопрос, что такое заряд, т. е. чем отличается заряженное тело от незаряженного. Здесь еще все покрыто туманом, рассеять который и должна рациональная механика в грядущем веке».

Следующий шаг, который предстоит сделать, — перенесение идей ускоренного движения по инерции в квантовую физику. Это позволит осуществить программу, сформулированную П. Дираком еще в середине прошлого века, — построить последовательную квантовую теорию излучения, свободную от серьезных трудностей, присущих современной квантовой электродинамике [13].

Огромное значение будут иметь экспериментальные исследования, направленные на регистрацию и тщательное изучение явлений, обусловленных ускоренными движениями частиц по инерции. Отметим книгу А. Дмитриева [14], посвященную экспериментальным исследованиям связи между электромагнитными явлениями и тяготением. В [14] показана возможность принципиально нового подхода к развитию теории тяготения, целью которого является разработка и освоение методов управления гравитацией. Эта задача, очевидно, значительно упростится с раскрытием физической природы гравитации.

В связи с рассмотренными в данной работе ускоренными движениями по инерции отметим исследования Г. Шипова по торсионным полям, порождающим силы инерции [15-17]. Развивая программу Эйнштейна по геометризации уравнений физики, Г. Шипов разработал теорию физического вакуума, в которой сформулирован принцип всеобщей относительности и на его основе решена проблема создания единой теории поля. Применение этой теории к материальной точке позволило осуществить геометризацию уравнений механики. На основании такого рода обобщения механики удалось предсказать возможность построения двигателей качественно нового типа, в которых перемещение центра масс тела осуществляется за счет управления силами инерции [17]. Разрабатываемый Г. Шиповым новый подход в механике, на наш взгляд, вызывает интерес и заслуживает дальнейшего развития, поскольку открывает широкие перспективы практических применений [15,16].

В настоящей работе не используется идея геометризации уравнений физики. Расширение схемы механики осуществляется путем обобщения принципа инерции Галилея — включением в теорию ускоренных движений по инерции. **Такой путь позволяет по-новому взглянуть на гравитацию: гравитация предстает не как особый вид физического взаимодействия, порождаемого телами и описываемого законом всемирного тяготения, а как проявление ускоренного движения тел по инерции.**

Формулировка механики, развиваемая в данной работе, и геометризованный вариант механики, предложенный Шиповым, можно рассматривать как теории, дающие описание поведения механических систем с различных точек зрения. Насколько адекватны они реальным системам, покажут последующие исследования.

Общенаучное и прикладное значение развиваемого в данной работе нового подхода к проблеме движения состоит в том, что этот подход станет основой технического прогресса общества на следующем этапе развития цивилизации. Использование расширенной схемы механики, учитывающей существование в природе ускоренных движений тел по инерции, приведет к технологическим прорывам в различных областях науки и техники, открывая невиданные горизонты в развитии общества.

Автор признателен В. П. Прокофьеву за интерес к проблеме инерции, просмотр рукописи, замечания, способствовавшие улучшению текста, внимание и поддержку и Ю. Д. Арепьеву за обсуждение темы, подбор литературы и сотрудничество.

Литература:

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т 1. Современная наука о природе. Законы механики. — М.: Мир, 1967.
2. *Хайкин С. Э.* Физические основы механики. — М.: Физматгиз, 1963.
3. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. — М.: Наука, 1982.
4. *Жилин П. А.* Реальность и механика. // Труды ХХШ летней школы «Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем». — СПб., 1996. — С.6-49; Актуальные проблемы механики. Т.1. — СПб., 2006. — С.54-90.
5. *Олейник В. П., Прокофьев В. П.* Вращательная инерция и ее физические следствия. Что такое гравитация? // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2008. — Т. 8. — №2(30). — С.23-56.
6. *Астахов А. В.* Курс физики. Т.1. Механика. Кинетическая теория материи. — М.: Главная редакция физ.-мат. литературы, 1977.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
8. *Олейник В. П.* Фундаментальные проблемы физики: сверхсветовая коммуникация, активные тепловые машины, безопорное движение. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2008. —

Т. 8. — №4(32). — С. 48-57.
9. *Олейник В. П.* Фундаментальные проблемы физики и научная революция. // Вестник МАЭН «Энерго-информационные технологии развития человека» («ЭИТ-2009»), май-июнь 2009 г., Россия, Барнаул / Под ред. Д. Н. Жданова. — Барнаул: ООО «Азбука», 2009. — С. 3-10.
10. *Головнев А.* Конечная Вселенная. Книга вторая. Физика конечной Вселенной. Альтернативная физическая концепция. — К.: Издательский Дом Д. Бураго, 2003.
11. *Олейник В. П.* Новая интерпретация релятивистской физики. Об одном из глубочайших заблуждений XX века. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2007. — Т.7. — №4(28). — С.32-64.
12. *Правдивцев В. Л., Литвинов Е. П.* К истории изучения аномальных явлений разведкой Военно-морского флота СССР. — www.tonnel-ufo. narod.ru.
13. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.
14. *Дмитриев А. Л.* Управляемая гравитация. — М.: Новый Центр, 2005.
15. *Шипов Г. И.* Теория физического вакуума. Теория, эксперименты и технологии. — М.: Наука, 1997.
16. *Шипов Г. И.* Аномальная физика и торсионные поля. — http://www.shipov.com.
17. *Шипов Г. И.* 4D гироскоп в механике Декарта. — М.: «Кириллица», 2006.

Статья поступила в редакцию 19.10.2009 г.

V. P. Oleinik

New approach to the motion problem: accelerated inertial motions

It is proved that in the conventional Newtonian scheme of mechanics an extensive class of motions drops out of the field of view — the **accelerated (curvilinear) motions of particles by inertia**. The fundamental role played by these motions in nature is due to the fact that they take place in the absence of any expenditure of energy and as a consequence give rise to the most stable states of physical systems.

Existence of accelerated inertial motions of particles necessitates a radical revision of Newtonian mechanics. Such states of motion of particles, as the most stable ones, may be naturally considered as a background for real, physical processes. To put it differently, in the new, extended scheme of mechanics the accelerated inertial motions should play a part of a reference point for physical processes. Physical processes observed in experiment should be treated as a deviation from the accelerated inertial motion states caused by the action of a perturbation. Under the action, for example, of an external force the physical system is removed from the state of accelerated inertial motion, and this process can be described by the Newtonian equations of motion. Such is, in general outline, the new scheme of dynamic processes description.

Obviously, the accelerated inertial motion states investigated in this paper should play in classical mechanics the role similar to that which is played by the ground state in quantum mechanics, namely: just as any quantum system tends to go over to the ground state, any classical system tends to go over to the state of accelerated inertial motion. It is only the deviation from this state which can be registered experimentally.

According to the results received, there are the forces in nature which are of purely kinematical origin; these forces, among which are the forces acting on the particle at its accelerated inertial motion, differ qualitatively from the ones considered in Newtonian mechanics. Their distinctive feature is that the work done by them on a particle essentially depends on the state of motion of the inertial reference frame in which the motion is considered. It means that the frames of reference, moving uniformly and rectilinearly relative to each other, are not physically equivalent, i. e. the principle of relativity becomes invalid if only the accelerated inertial motions are taken into consideration.

Without taking account of the accelerated inertial motions, it is impossible to receive the description of real physical systems behaviour adequate to nature. The Newtonian mechanics, in which the forces of kinematical nature acting on particles and curvilinear inertia are not considered, is a rather rough scheme of description of dynamics. The deep crisis of modern physics is caused to a great extent by the fact that the forces of kinematical nature and the curvilinear inertial motion resulted from them are not considered in the standard scheme of mechanics underlying all modern physics.

One of the consequences of this work can be formulated as follows: Newton's hypothesis that there exist gravitational forces in the nature satisfying the law of universal gravitation is unnecessary. There is no need for this hypothesis in view of the fact that the attraction of particles to one another is described in a natural way in the new, extended scheme of mechanics taking into account the phenomenon of accelerated inertial motion of particles. Failures of all undertaken before attempts to reveal the physical nature of gravitation are due to the fact that they were based on the Newtonian scheme of mechanics, which, having excluded the accelerated inertial motions from consideration, is incapable in principle to describe and explain gravitation without resort to any additional hypotheses.

The results and conclusions of this work are supported by extensive observational data accumulated during half a century on abnormal phenomena which cannot be explained from the viewpoint of current physics and show the prospect of producing technologies unattainable at present. Obviously, the working out of technologies and creation of electronic devices on the basis of accelerated inertial motions of bodies will lead to the next, higher level of development of civilization.

Keywords: incompleteness of Newtonian scheme of mechanics, extended scheme of mechanics, accelerated inertial motion of particle, rotary inertia, curvilinear inertia, forces of kinematical nature, nonequivalence of inertial reference frames, strong and week inertia, inertial motion on spherical surface, gravitation and abnormal phenomena as manifestations of accelerated inertial motions.