Теория гравитации

УДК 524.827+531.51+530.12

Олейник В. П., Прокофьев В. П.

ВРАЩАТЕЛЬНАЯ ИНЕРЦИЯ И ЕЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ. ЧТО ТАКОЕ ГРАВИТАЦИЯ?

Кафедра общей и теоретической физики,
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
Проспект Победы 37, Киев, 03056, Украина
http://superluminalelectron.org/en*; e-mail:* valoleinik@gmail.com

В работе на основе классической механики **доказано существование особого вида движения частиц по инерции — *вращательной инерции*,** которая является обобщением поступательного движения по инерции на случай движения по криволинейной траектории. Тем самым **открыт качественно новый тип движения по инерции в природе, играющий ключевую роль в динамике реальных частиц**. Показано, что ***вращательная инерция* является причиной тяготения: гравитационное поле не порождается материей, а возникает при вращательном движении тел по инерции. Разработанная нами теория *вращательной инерции* является обоснованием явления безопорного движения, открывающим путь к созданию принципиально новых двигателей.** Согласно общепринятым представлениям, в природе существует единственный вид движения по инерции — равномерное и прямолинейное движение тела, не подверженного внешнему воздействию (**поступательная инерция**). Однако движение практически всех тел в наблюдаемой части Вселенной представляет собой суперпозицию вращательного и поступательного движений. Это обстоятельство указывает на необходимость расширения понятия движения по инерции и обобщения его на область криволинейного движения. Необходимость обобщения понятия движения по инерции следует также из наших предыдущих исследований [1-3], в которых доказано, что движущиеся друг относительно друга инерциальные системы отсчета (ИСО) не являются физически эквивалентными. Вследствие неравноправия ИСО, **специальная теория относительности (СТО) оказывается внутренне противоречивой**: как показано в [2,3], динамический принцип, лежащий в основе СТО, несовместим с преобразованиями Лоренца. В данной работе **введено понятие вращательного движения тела по инерции** как прямое обобщение поступательной инерции, а также рассмотрена **вращательно-поступательная инерция**. Показано, что **вращательная инерция** физической системы, состоящей из нескольких частиц, сопровождается возникновением силового воздействия на частицы, которое обусловлено пространственной неоднородностью самой системы (существованием выделенных точек, направлений и пр.). Вследствие вращательной инерции, в окружающем пространстве появляется силовое поле, аналогичное полю магнитной индукции; это поле действует на частицу силой, совпадающей по форме с силой Лоренца, в которой роль электрического заряда частицы играет ее масса. Проведено сравнение, в одном частном случае, вращательного движения по инерции системы двух частиц с движением частиц, взаимодействующих между собой согласно закону всемирного тяготения. Показано, что характер движения системы в обоих подходах одинаков. Величины, описывающие вращательное движение по инерции и движение в потенциальном силовом поле, совпадают, кроме одной величины — полной энергии частиц. При вращательной инерции полная энергия частиц, как и должно быть, положительна, а при описании движения согласно закону всемирного тяготения роль полной энергии играет энергия связи частицы в потенциальной яме, и эта энергия отрицательна. Указанное различие является следствием принципиально различных подходов к описанию движения частиц в классической механике и в данной работе. В качестве приложения общей теории рассмотрена вращательная инерция трехчастичной системы, моделирующей движение Солнца, Земли и Луны. Вращательная инерция приводит к появлению силы притяжения между частицами. Согласно полученным результатам, **сила гравитационного притяжения, будучи следствием вращательного движения по инерции, не является особым видом взаимодействия между материальными телами; сила притяжения**

между двумя покоящимися телами равна нулю. Гипотеза о существовании в природе гравитационных сил, которым подвержены все элементарные частицы и которые подчиняются закону всемирного тяготения, является, таким образом, ошибочной. Правильность выводов работы следует из того, что 1) имеющиеся в литературе опытные данные [4] свидетельствуют в пользу того, что гравитационное притяжение не подчиняется закону всемирного тяготения, и 2) результаты работы вытекают с необходимостью из наиболее общих законов развития природы — законов диалектики [5,6]. Представленное в работе исследование отвечает физическому уровню строгости, принятому в современной теоретической физике.

Ключевые слова: физическая неэквивалентность инерциальных систем отсчета, внутренняя противоречивость специальной теории относительности, проблема движения, вращательная инерция, вращательно-поступательная инерция, гравитация как следствие вращательной инерции, ошибочность закона всемирного тяготения, безопорное движение.

> Что касается закона всемирного тяготения, то это гипотеза, которая может оказаться опровергнутой опытом.
>
> *А. Пуанкаре* [7]

> Поиски механизма «притяжения» одного тела другим — это поиски «ключа» под тем «фонарем», который зажжен Ньютоном. Но ведь ключ находится совсем не там !
>
> *В. К. Дедков* [8]

1. Введение

В основе современной физики лежит представление о том, что существует инерциальная система отсчета (ИСО), т. е. система отсчета, в которой выполняется принцип инерции Галилея, — в этой системе свободное тело движется равномерно и прямолинейно. Значение ИСО определяется тем, что именно в ней, как полагают, справедливы основные уравнения динамики, например, уравнения движения классической механики и электродинамики. Принимается, что если система отсчета K является инерциальной, то и любая другая система отсчета K', движущаяся относительно K равномерно и прямолинейно, также является инерциальной.

В нерелятивистском приближении инерциальные системы отсчета, движущиеся друг относительно друга, связаны между собой преобразованиями Галилея. При переходе из одной ИСО в другую уравнения движения сохраняют свою форму. С физической точки зрения это означает, что движущиеся друг относительно друга ИСО физически равноправны, эквивалентны. В этом состоит принцип относительности — «фундаментальнейший принцип современной физики» [9].

Попыткой обобщить принцип относительности на область электромагнитных явлений является специальная теория относительности (СТО). Анализ СТО показывает, однако, что **принцип относительности несовместим с принципом причинности, лежащим в основе СТО. Это значит, что СТО внутренне противоречива** [1–3]. Суть дела состоит в том, что преобразования Лоренца, связывающие между собой движущиеся друг относительно друга ИСО, оказываются совместимыми с динамическим принципом (принципом причинности) только для простейшей физической системы — классической точечной частицы. Лишь в этом случае движущиеся друг относительно друга ИСО оказываются физически эквивалентными.

До недавнего времени считалось, что из релятивистской инвариантности уравнений движения следует физическая эквивалентность ИСО. Как разъясняется в [3], это утверждение, вообще говоря, ошибочно, оставаясь справедливым только в классической механике. ИСО оказываются физически неравноправными между собой вследствие того, что в каждой системе отсчета время выступает не только как четвертая координата, но и как особая характеристика системы отсчета, описывающая эволюцию физической системы в соответствии с уравнениями движения, т. е. с принципом причинности. Необходимо отличать **глобальное время**, являющееся важнейшей физической величиной, на языке которой формулируется принцип причинности в данной ИСО, от входящего в преобразования Лоренца **локального времени**, не имеющего глубокого физического смысла. **Глобальное время является индивидуальной физической характеристикой ИСО**, связывающей динамику с геометрией и выделяющей эту систему отсчета среди всех других, движущихся относительно нее равномерно и прямолинейно. Физическая неэквивалентность ИСО проявляется в том, что преобразования Лоренца выбивают решения динамических уравнений из класса решений с единым глобальным временем и переводят их в решения, характеризующиеся локальными временами, которые являются **чисто координатными величинами**, не имеющими отношения к принципу причинности (за исключением классической точечной частицы).

С физической точки зрения, главный недостаток СТО состоит в том, что время рассматривается в ней чисто формально — как четвертая координата единого пространства-времени и не учитывается должным образом та роль, какую время играет в физике с точки зрения динамического принципа. На это обстоятельство впервые обратил внимание А. А. Фридман (1923 г.), указавший на необходимость «**возвращения времени его исключительного положения**» в физике, «**связанного с принципом причинности**», который нужно сформулировать «**ясно и строго, а не так, как это сейчас сделано**» (см. [10, с. 67, 68]). К сожалению, А. А. Фридман вскоре ушел из жизни, и та обширная программа по исследованию связи времени и динамики, которую он выдвинул, осталась нереализованной [11].

Вывод о физической неэквивалентности ИСО, впервые сформулированный в рамках квантовой электродинамики в работах [12, 13] (1978 г.), **носит принципиальный характер: он указывает на необходимость глубокого и детального анализа проблемы движения по инерции — фундаментальной проблемы, лежащей у самых истоков современной физики.**

Классическая механика исходит из представления о том, что в природе существует единственный вид движения по инерции — равномерное и прямолинейное (поступательное) движение тела, не подверженного внешнему воздействию. Поступательное движение не исчерпывает, очевидно, всех возможных движений в окружающем мире. Действительно, движение практически всех тел в наблюдаемой части Вселенной представляет собой суперпозицию вращательного движения и поступательного. Понятие движения тела по инерции является одним из основных понятий классической механики. В квантовой механике ему соответствует понятие состояния с наименьшей энергией (основного состояния) — такого состояния, в котором физическая система не испытывает каких-либо возмущений. Очевидно, что движение подсистем, из которых состоит система в основном состоянии, не может не содержать вращательной компоненты, так как в ее отсутствие система становится неустойчивой. Из этих рассуждений видно, что **физическая картина мира, не учитывающая вращательного движения тел по инерции, не может быть полностью адекватной реальной природе**. Она принципиально неполна, так как неспособна корректно описать основное состояние мира, соответствующее движению материальных тел по инерции.

Отметим курьезный факт (см. [14, с. 37, 51], и [6, с. 48, 49]): формулировка принципа инерции, содержащаяся в стандартных учебниках физики и приписываемая Галилею, на самом деле принадлежит Декарту, согласно которому «всякая вещь пребывает в том состоянии, в каком она находится, пока ничто ее не изменит» и «всякое движущееся тело стремится продолжить свое движение по прямой». Для Галилея движение по инерции — это равномерное движение по кругу. В частности, Галилей писал: «...если Земля по природе стремится к движению, то таковым может быть только круговое, а прямолинейное остается для использования его частями»(см. [6, с. 48]).

В данной работе поступательное движение частицы по инерции обобщено на случай инерции при движении по криволинейной траектории. Так как при движении этого типа возникает ускорение, то вращательная инерция сопровождается силовым воздействием на частицу, которое не является, однако, действием на частицу внешней силы. Речь идет о силах, возникновение которых обусловлено пространственной неоднородностью самой системы (наличием выделенных точек, направлений и пр.).

Главная физическая идея, из которой мы исходим, состоит в том, что **по самому смыслу движения по инерции** сила, действующая на частицу при таком ее движении по криволинейной траектории не может совершать работы над частицей, т. е. сила не должна быть консервативной. Причем движение частицы должно быть таким, чтобы обращались в нуль не только полная работа, производимая силой над частицей, но и компоненты работы, соответствующие поступательному и вращательному движению. Очевидно, что если уравнения динамики допускают подобное движение частицы, то оно и является естественным обобщением поступательной инерции, и можно быть уверенным в том, что этот тип движения не может не встречаться в природе. Более того, можно утверждать, что такого рода движение, в силу своей простоты, должно иметь фундаментальный характер, играя в природе ключевую роль.

Основной результат работы состоит в доказательстве того, что существование вращательного движения частицы по инерции вытекает из уравнений классической механики и что именно **вращательная инерция является причиной гравитации**, приводя к притяжению частиц друг к другу и создавая иллюзию существования особой, гравитационной силы, якобы присущей частицам по самой природе вещей. Закон всемирного тяготения Ньютона является, по существу, выражением подобной иллюзии, а не физическим законом. Суть дела состоит в том, что **частицы не порождают гравитационное поле,** обеспечивающее взаимодействие между ними; **притяжение между частицами возникает вследствие их вращательного движения по инерции**. Вопреки всеобщему убеждению, **сила гравитационного притяжения между двумя покоящимися телами равна нулю.**

В работе проведено сравнение вращательного движения по инерции системы двух частиц с движением частиц, взаимодействующих между собой согласно закону всемирного тяготения, в частном случае, когда траекторией движения частиц является окружность. Показано, что характер движения системы в обоих подходах одинаков. Величины, описывающие вращательное движение по инерции и движение в потенциальном силовом поле, совпадают, кроме одной величины — полной энергии частиц. При вращательной инерции физической системы полная энергия частиц, как и должно быть, положительна, а при описании движения согласно закону всемирного тяготения роль полной энергии играет энергия связи частицы в потенциальной яме, и эта энергия отрицательна.

Указанное различие является следствием принципиально различных подходов к описанию движения частиц в классической механике и в данной работе. Общепринятый подход основан на представлении о том, что финитное движение частицы в пространстве возможно лишь в поле потенциальной ямы, когда возникают естественным образом границы движения частицы и частица оказывается в связанном состоянии, в состоянии с отрицательной энергией. Закон всемирного тяготения постулирует существование гравитационного притяжения между частицами, описываемого потенциальным силовым полем. Это поле понадобилось для того, чтобы в пространстве возникли потенциальные ямы, обеспечивающие локализацию частиц в пространстве.

В данной же работе мы исходим из существования в природе вращательного движения по инерции. Как видно из полученных нами результатов, вращательная инерция обеспечивает финитное движение частиц в пространстве. Благодаря вращательной инерции, связанные состояния частиц становятся возможными и в отсутствие силовых потенциальных полей. Однако связанные состояния, образующиеся вследствие вращательной инерции, существенно отличаются от обычных связанных состояний — они характеризуются тем, что энергии частиц остаются положительными. Гипотеза о существовании гравитационного поля притяжения между частицами, являющегося силовым потенциальным полем, становится излишней. Следует подчеркнуть, что в предлагаемом подходе связанные состояния частиц получаются на основе чисто кинематических соображений; уравнения движения используются лишь для нахождения условий, при которых возможна вращательная инерция.

Принято считать, что все материальные тела в природе взаимно притягивают друг друга. Полагают, что гравитационное взаимодействие имеет универсальный характер: ему подвержены все без исключения элементарные частицы; гравитация порождается материальными телами, и сила гравитационного взаимодействия между двумя телами, покоящимися или движущимися друг относительно друга, подчиняется закону всемирного тяготения — она пропорциональна произведению масс тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Между тем, имеются многочисленные экспериментальные свидетельства о том, что далеко не все тела порождают тяготение (см. [4]). В частности, по-видимому, не все тела Солнечной системы обладают собственным тяготением. Как отмечается в [4], у шести десятков спутников планет Солнечной системы никаких признаков собственного тяготения не наблюдается.

Наблюдения указывают на то обстоятельство, что существует разграничение между областями действия тяготения планет и областью действия тяготения Солнца, а именно: тело, малое по сравнению с планетой, тяготеет только к одному силовому центру — солнечному или планетарному, так что действие другого силового центра отключается.

Распределение вещества в поверхностном слое Земли неоднородно: в одних местах размещаются плотные породы, в других — рыхлые; плотность вещества в горных массивах значительно превышает плотность воды в океанах. Расчеты показывают, что если бы материальные тела притягивались друг к другу так, как предсказывает закон всемирного тяготения, то указанные неоднородности в распределении вещества вполне можно было бы зафиксировать с помощью гравиметрических измерений. Однако оказалось, что поверхностные неоднородности не оказывают никакого воздействия на гравиметрические приборы. Простейшим из такого рода приборов является отвес: он должен уклоняться в ту сторону, где плотность поверхностных масс больше. Так, вблизи горного массива отвес должен уклоняться к этому массиву, а на берегу океана он должен уклоняться от океана. Однако, как показали измерения, уклонения отвеса не обнаруживаются ни вблизи горных массивов, ни вблизи океанов.

Приведенные выше экспериментальные результаты указывают на то, что «тяготение порождается вовсе не веществом», вещество лишь «подчиняется тяготению» [4].

В связи с тем, что в учебниках физики приводятся, в качестве экспериментального доказательства закона всемирного тяготения, эксперименты Кавендиша и сообщается об опытах Этвёша, Дикке и Брагинского, подтвердивших равенство инертной и гравитационной масс с точностью до двенадцати десятичных знаков, возникает вопрос: разве указанных опытов недостаточно для того, чтобы считать закон всемирного тяготения надежно установленным как первое приближение в теории тяготения? Ответ состоит в следующем: перечисленные выше факты (об отсутствии собственного тяготения у ряда малых тел Солнечной системы, об отсутствии реакции гравиметрических инструментов не неоднородности в распределении вещества в поверхностном слое Земли и др.) вызывают сомнение в правильности физической интерпретации экспериментов Кавендиша и других исследователей. Нам представляется, что не далек от истины А. Гришаев из ВНИИФТРИ, заметивший, что поведение высокочувствительной измерительной колебательной системы существенно зависит от микровибраций тел, окружающих измерительную систему: используя неустойчивость измерительной аппаратуры, методику измерений можно организовать, за счет микровибраций, таким образом, чтобы получить любой желаемый результат и, в частности, результат, в который твердо веришь. Что касается опытов Этвёша, Дикке и Брагинского, то, как отмечает А. Гришаев, в этих опытах установлена лишь «одинаковость ускорений свободного падения у различных тел, и ничего сверх этого» [4].

Глубокий критический анализ постулатов, лежащих в основе закона всемирного тяготения, содержится в книге [8], в которой рассмотрены не «замечаемые» и не «разглашаемые» парадоксальные следствия теории тяготения, обусловленные произвольно принятыми Ньютоном постулатами. Как отмечает В. К. Дедков, эти постулаты не имеют никакого научного обоснования. «Это даже не гипотезы, а домыслы в духе средневековой схоластики» [8, с. 98].

Вывод о существовании в природе вращательной инерции впервые сформулирован А. Головневым [5, 6], исходя из наиболее общих законов природы, управляющих ее развитием и движением, — законов диалектики. В основе диалектического метода лежит представление о том, что любая физическая реальность является органическим единством диалектических противоположностей. И поэтому любая физическая теория может быть адекватной физической реальности, т. е. способна отражать ее с достаточной точностью и полнотой, лишь при условии, что она связывает присущие этой реальности противоположности в единое, неразрывное целое. Это целое характеризуется тем, что его диалектические составляющие неотделимы друг от друга и в то же время противостоят, противодействуют друг другу. Применительно к проблеме движения по инерции, диалектический метод указывает на необходимость дополнить инерцию Галилея ее естественной диалектической противоположностью — вращательной инерцией. Как подчеркивает А. Головнев, учет вращательной инерции как необходимой составляющей движения по инерции позволяет понять, что «все небесные орбиты и все орбиты внутриатомные — инерционные» [6, с. 84]. Вращательная инерция делает совершенно излишним гравитационное взаимодействие как особый вид силового взаимодействия между материальными телами. Говоря о гравитации, Головнев пишет: «такой физической силы в космосе попросту нет. Поскольку нет в ней никакой нужды: все небесные тела обращаются по своим космическим орбитам без всякого силового принуждения, добровольно, поскольку — инерционно» [6, с. 90].

В настоящей работе построена количественная теория вращательной инерции. Результаты нашего исследования, проведенного на физическом уровне строгости, позволяют заключить, что **причиной тяготения являются не гравитационные силы, введенные Ньютоном, а вращательное движение тел по инерции**.

Перечислим основные результаты, содержащиеся в последующих разделах.

В разделе 2 поступательное движение частицы по инерции (поступательная инерция) обобщается на случай движения по криволинейной траектории, вводится понятие вращательной инерции и формулируются условия вращательной инерции. Проводится подробный анализ вращательного движения частицы по инерции. Показано, что при вращательной инерции на частицу действует центростремительная сила, направленная к центру кривизны траектории. Физическая ситуация характеризуется тем, что в каждый момент времени в пространстве имеются две выделенные точки — точка, в которой находится частица, и центр кривизны траектории движения частицы; первая играет роль источника силового поля (силового центра), а вторая является стоком поля. Характерная особенность частицы как силового центра при вращательной инерции состоит в том, что она является источником непотенциального поля, действие которого на частицу аналогично действию силы Лоренца на заряженную частицу со стороны магнитного поля, с тем лишь отличием, что роль электрического заряда играет масса частицы, а роль магнитного поля — угловая скорость частицы. Иными словами, вращательное движение частицы по инерции сопровождается появлением в пространстве силового поля, аналогичного полю магнитной индукции. Подчеркнем, что **частица сама по себе, независимо от своего состояния движения, не является источником силового поля, она становится источником силы лишь при вращательной инерции.**

Раздел 3 посвящен выяснению вопроса о том, как выглядит вращательное движение частицы по инерции, происходящее в системе отсчета K, с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе отсчета K', которая движется относительно K равномерно и прямолинейно. С помощью преобразований Галилея показано, что если в системе отсчета K частица движется по окружности с постоянной угловой скоростью, то в K' траектория частицы является незамкнутой кривой — трохоидой, вид которой зависит от направления вращения частицы (т. е. от направления вектора момента импульса частицы). Это обусловлено тем, что с точки зрения наблюдателя, находящегося в K', движение частицы по инерции представляет собой наложение двух движений — вращательного вокруг центра кривизны траектории и поступательного, происходящего в направлении, противоположном направлению движения K' (поступательное движение является фактически дрейфом частицы). Такого рода движение частицы естественно назвать **вращательно-поступательной инерцией**. Ее особенность состоит в том, что сила, действующая на частицу в этом движении, совершает работу над частицей, приводя к дрейфу частицы, но при этом среднее по периоду значение работы обращается в нуль. Как показывает анализ, из-за дрейфа частицы, обусловленного движением систем отсчета K и K', возникает дополнительный вращательный момент, относительно центра кривизны, силы, действующей на частицу. Вследствие этого, над частицей производится работа, идущая на приращение кинетической энергии частицы.

В разделе 4 рассматривается вращательное движение по инерции двухчастичной системы как такое движение, в котором каждая частица движется по инерции. Условие замкнутости системы двух частиц приводит к тому, что частицы, движущиеся по инерции, оказываются связанными между собой. Связь состоит в том, что при вращательной инерции возникает сила притяжения, действующая между частицами; вектор силы направлен перпендикулярно скорости частиц, и поэтому поле силы притяжения не является потенциальным (оно работы не совершает). Действующее на частицы силовое поле, порождаемое вращательной инерцией, и является, очевидно, тем физическим полем, которое превращает пространство в физическую среду, называемую **эфиром**. Движение частиц происходит по концентрическим окружностям, центр которых совпадает с центром масс системы, причем расстояние между частицами сохраняется. Подробно рассматривается также поступательное движение двухчастичной системы по инерции.

Раздел 5 посвящен сравнению вращательной инерции двухчастичной системы с движением двух частиц, взаимодействие между которыми подчиняется закону всемирного тяготения. Для простоты рассматривается частный случай, когда в рамках стандартного подхода, основанного на ньютоновской теории гравитации, фиктивная частица массы μ (μ — приведенная масса) движется по окружности, находясь в связанном состоянии с отрицательной энергией.

Из сравнения результатов двух подходов видно, что физические характеристики движения в этих походах одинаковы, если положить $R_* = R_0$, где R_* - радиус окружности, по которой движется фиктивная частица в стандартном подходе, совпадающий с положением минимума эффективной потенциальной энергии частицы в гравитационном поле, и R_0 — расстояние между частицами, совершающими вращательное движение по инерции. Единственное принципиальное различие между обоими подходами состоит в том, что полная энергия двухчастичной системы при вращательной инерции совпадает с кинетической энергией системы и поэтому является положительной величиной, в то время как энергия упомянутой выше фиктивной частицы в общепринятом подходе отрицательна как энергия частицы в связанном состоянии.

Это различие является следствием принципиально различных подходов к описанию движения частиц в классической механике и в данной работе. В стандартном подходе финитное движение частицы в пространстве реализуется путем приписывания частице способности создавать потенциальное силовое поле. Закон всемирного тяготения постулирует существование гравитационного притяжения между частицами как физического свойства, внутренне присущего любым частицам вещества. Это поле необходимо для того, чтобы в пространстве возникли потенциальные ямы, обеспечивающие появление границ движения и локализацию частиц.

В данной работе **доказано существование особого вида движения частиц — вращательного движения по инерции**, при котором возникает притяжение между частицами, обеспечивающее финитное движение частиц в пространстве. Благодаря вращательной инерции, связанные состояния частиц становятся возможными и в отсутствие силовых потенциальных полей; однако связанные состояния, образующиеся вследствие вращательной инерции, характеризуются тем, что энергии частиц остаются положительными. Гипотеза о существовании силовых потенциальных полей (например, гравитационного поля притяжения, действующего между частицами) становится излишней. Следует подчеркнуть, что в предлагаемом подходе связанные состояния частиц получаются на основе чисто кинематических соображений. Уравнения движения используются лишь для нахождения условий, при которых реализуется вращательная инерция и из которых определяются силы взаимодействия между частицами.

В разделе 6 приведен пример вращательной инерции трехчастичной системы. Рассмотрен случай такого движения по инерции, в котором сохраняется кинетическая энергия и момент импульса каждой частицы. Из-за соотношений связи между физическими характеристиками частиц, вытекающих из условия замкнутости системы, лишь две из рассматриваемых частиц являются независимыми. Поэтому, зафиксировав физические характеристики двух частиц, участвующих во вращательной инерции, можно однозначно определить физические характеристики третьей. Как видно из полученных результатов, в состоянии вращательной инерции все три частицы движутся с одной и той же угловой скоростью по концентрическим окружностям, центр которых совпадает с центром масс системы.

Раздел 7 посвящен вращательной инерции трехчастичной системы, моделирующей движение Солнца, Земли и Луны. Решение задачи проведено последовательно в несколько этапов. Вначале описана вращательная инерция подсистемы, состоящей из частиц 1 и 2 (подсистема A, моделирующая Землю и Луну). Затем рассмотрено движение по инерции вспомогательной подсистемы (подсистема B), состоящей из частицы 3, моделирующей Солнце, и фиктивной частицы, соответствующей центру масс подсистемы A (точка C_1). Показано, что результирующее движение представляет собой наложение двух движений — движения частиц 1 и 2 по концентрическим окружностям с центром в точке C_1 и движения частицы 3 и фиктивной частицы, находящейся в точке C_1, по концентрическим окружностям с центром в точке, совпадающей с центром масс всей системы (точка C). В системе центра масс всей трехчастичной системы (точка C), на небольшом участке окружности, по которой движется точка C_1 (небольшом по сравнению с радиусом окружности), траектории результирующего движения частиц 1 и 2 представляют собой трохоиду.

В заключении формулируются главные результаты работы и разъясняется их значение для прикладных исследований.

Учитывая новизну излагаемого материала, некоторую необычность сформулированных нами физических идей и нестандартность полученных результатов и выводов, авторы стремились привести разъяснения и выкладки с максимально возможной полнотой.

2. От поступательной инерции к вращательной

Движение материальной точки (точечной частицы) в силовом поле описывается уравнением движения классической механики

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{1}$$

где $\vec{p} = m\vec{v}, \quad m = const,$ $\vec{v}$ — скорость частицы массой m, $\vec{F}$ - внешняя сила, действующая на частицу. Из (1) видно, что в отсутствие внешней силы, $\vec{F} = 0$, частица движется равномерно и прямолинейно:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0, \text{ т. е. } \vec{v} = \vec{v}_0 = const. \tag{2}$$

Такое движение принято называть **движением по инерции**. Из равенства $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0$ получаем следующий закон движения частицы по инерции:

$$\vec{r} = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0, \quad \vec{v}_0 = const, \quad \vec{r}_0 = \vec{r}\big|_{t=t_0}. \tag{3}$$

При $\vec{v}_0 = 0$ частица находится в состоянии покоя.

Необходимым условием движения материальной точки по инерции является, очевидно, сохранение кинетической энергии частицы:

$$\frac{m\vec{v}^2}{2} \equiv K = const. \tag{4}$$

Умножая обе части уравнения (1) на элементарное перемещение частицы $d\vec{r} = \vec{v}dt$, получаем:

$$\vec{v}d\vec{p} = \vec{F}d\vec{r} \equiv dA \quad \rightarrow \quad dK = \vec{F}\vec{v}dt, \tag{5}$$

где dA и dK — элементарная работа, совершаемая силой над частицей при ее перемещении за время dt, и полученное в этом процессе приращение кинетической энергии частицы. При движении материальной точки по инерции равенство (5) превращается в тривиальное тождество: $0 \equiv 0$ (т. к. при движении этого типа $K = const$ и $\vec{F} = 0$).

Движение частицы по инерции, описываемое равенствами (2) (или, эквивалентно, равенствами (3)), будем называть **поступательной инерцией**. Если v и φ — полярные координаты вектора скорости $\vec{v}$,

$$\vec{v} = v\vec{e}_{\vec{v}}, \quad \vec{e}_{\vec{v}} = (\cos\varphi, \sin\varphi), \tag{6}$$

$\vec{e}_{\vec{v}}$ — орт вектора скорости $\vec{v}$, то условие поступательной инерции, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0,$ эквивалентно системе уравнений

$$\dot{v} = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \tag{7}$$

решение которой можно записать в виде:

$$v = v_0 = const, \quad \varphi = \varphi_0 = const. \tag{8}$$

Чтобы обобщить поступательное движение частицы по инерции на случай движения по инерции по криволинейной траектории, удобно перейти к полярным координатам. При движении по криволинейной траектории возникает ускорение частицы, т. е. на частицу действует некоторая сила $\vec{F}$ ($\vec{F} \neq 0$). В качестве обобщения поступательной инерции естественно принять такое движение частицы по криволинейной траектории, при котором

$$\vec{F}\vec{v} = 0, \quad v = const, \tag{9}$$

т. е. сила $\vec{F}$ не совершает работы над частицей $(dA = 0)$ и, следовательно, кинетическая энергия частицы сохраняется (см.(5)). В связи с тем, что движение частицы по криволинейной траектории можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений, величину работы dA, производимой силой $\vec{F}$ над частицей, можно разложить на две компоненты, соответствующие указанным выше движениям. Движение частицы по инерции при $\vec{F} \neq 0$ естественно подчинить еще одному условию — требованию, чтобы обращалась в нуль не только полная работа dA, но и каждая из ее компонент.

Проведем подробный анализ движения по инерции при $\vec{F} \neq 0$ в предположении, что частица движется в плоскости P, в которой лежит и начало О плоской декартовой системы координат K. Радиус-вектор и вектор скорости частицы запишем в виде:

$$\vec{r} = r\vec{e}_{\vec{r}}, \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_{\vec{r}} + r\dot{\vec{e}}_{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_{\vec{r}} + r\varphi\vec{n}, \tag{10}$$

где $\vec{e}_{\vec{r}} = \vec{e}_{\vec{r}}(t)$ — орт радиуса-вектора, $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к вектору $\vec{e}_{\vec{r}}$ и лежащий в плоскости P, $\varphi = \dfrac{d\varphi}{dt} \equiv \omega$, $d\varphi$ — угол между векторами $\vec{e}_{\vec{r}}(t+dt)$ и $\vec{e}_{\vec{r}}(t)$. Введем единичный вектор $\vec{\vec{m}}$, перпендикулярный к пл. P: $\vec{\vec{m}} = [\vec{e}_{\vec{r}}\vec{n}]$. Очевидно, что $\vec{n} = [\vec{\vec{m}}\vec{e}_{\vec{r}}]$. В силу того, что $\vec{e}_{\vec{r}}\vec{n} = 0$, из (10) получаем:

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\varphi^2 .$$

Мы рассматриваем такое движение, в котором $\dot{v} = 0$, но $\dot{\Phi} \neq 0$ (ср. с (7)). Полагая $v = v_0 = const \neq 0$, перепишем предыдущее равенство в виде:

$$\dot{r}^2 + r^2\varphi^2 = v_0^2. \tag{11}$$

Отсюда, в силу (5), $\vec{F}\vec{v} = m\dot{\vec{v}}\vec{v} = \dfrac{dK}{dt} = 0$ (см.(9)).

С помощью выражения (10) вычислим момент импульса $\vec{L}$ частицы относительно начала координат:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = mr^2\varphi[\vec{e}_{\vec{r}}\vec{n}] = L\vec{\vec{m}}, \quad L == mr^2\varphi, \quad \vec{\vec{m}} = const. \tag{12}$$

Учитывая равенства

$$\vec{e}_{\vec{r}} = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \dot{\vec{e}}_{\vec{r}} = \varphi\vec{n}, \quad \vec{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi), \quad \vec{e}_{\vec{r}}\vec{n} = 0, \tag{13}$$

и формулы (8) и (10), вычисляем ускорение:

$$\dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\varphi^2)\vec{e}_{\vec{r}} + (2\dot{r}\varphi + r\varphi)\vec{n} = v_0\dot{\vec{e}}_{\vec{v}}. \tag{14}$$

Сила $\vec{F}$, момент силы $\vec{M}$ и скорость изменения момента импульса $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ определяются формулами:

$$\begin{gathered}\vec{F} = m\dot{\vec{v}}, \quad \vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = mr(2\dot{r}\varphi + r\varphi)\vec{\vec{m}} = mrv_0\dot{\Phi}[\vec{e}_{\vec{r}}\vec{\vec{n}}] = M\vec{\vec{m}}, \quad M = \dot{L}, \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = m[\vec{r}\dot{\vec{v}}] = mr(2\dot{r}\varphi + r\varphi)[\vec{e}_{\vec{r}}\vec{n}] = \dot{L}\vec{\vec{m}}, \quad \dot{L} = \frac{dL}{dt} = mr(2\dot{r}\varphi + r\varphi) = mr\dot{r}\dot{\Phi}.\end{gathered} \tag{15}$$

Из (12) и (15) видно, что выполняется, как и должно быть, известное уравнение моментов: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$. При выводе соотношений (15) использованы следующие равенства, аналогичные (13):

$$\vec{e}_{\vec{v}} = (\cos\Phi, \sin\Phi), \quad \dot{\vec{e}}_{\vec{v}} = \dot{\Phi}\vec{\vec{n}}, \quad \vec{\vec{n}} = (-\sin\Phi, \cos\Phi), \quad \vec{e}_{\vec{v}}\vec{\vec{n}} = 0, \tag{16}$$

а также равенства $\vec{\vec{n}} = [\vec{\vec{m}}\vec{e}_{\vec{v}}]$, $\vec{r}\vec{\vec{m}} = 0$, $[\vec{e}_{\vec{r}}\vec{\vec{n}}] = \vec{\vec{m}}\cos(\Phi - \varphi)$. Используя (13) и (16), из равенств (6) и (10) выводим:

$$\dot{r} = v_0\cos(\Phi - \varphi), \quad r\varphi = v_0\sin(\Phi - \varphi). \tag{17}$$

Вектор скорости $\vec{v}$ (10) можно представить в виде суммы двух компонент:

$$
\begin{aligned}
&\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \\
&\vec{v}_{\parallel} = \dot{r}\vec{e}_{\vec{r}}, \quad \vec{v}_{\perp} = r\varphi\vec{n} = r\varphi[\vec{m}\vec{e}_{\vec{r}}] = [\varpi\vec{r}], \quad \varpi = \varphi\vec{m} = \omega\vec{m},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где ϖ — вектор угловой скорости. Компоненты вектора скорости имеют следующий смысл: $\vec{v}_{\parallel}$ описывает движение частицы вдоль радиуса-вектора (скорость поступательного движения), а $\vec{v}_{\perp}$ - вращение частицы вокруг оси, перпендикулярной к плоскости P (скорость вращательного движения). Соответственно разложению (18) вектор элементарного перемещения $d\vec{r}$ запишем в виде суммы перемещений при поступательном и вращательном движениях,

$$d\vec{r} = d\vec{r}_{\parallel} + d\vec{r}_{\perp}, \quad d\vec{r}_{\parallel} = \vec{v}_{\parallel}dt, \quad d\vec{r}_{\perp} = \vec{v}_{\perp}dt,$$

и разложим на две компоненты элементарную работу:

$$
\begin{aligned}
&dA = dA_{\parallel} + dA_{\perp}, \\
&dA_{\parallel} = \vec{F}d\vec{r}_{\parallel} = \vec{F}\vec{e}_{\vec{r}}\dot{r}dt, \quad dA_{\perp} = \vec{F}d\vec{r}_{\perp} = (\vec{F}[\varpi\vec{r}])dt = (\varpi[\vec{r}\vec{F}])dt = \vec{M}d\varphi, \quad d\varphi = \varpi dt.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Здесь $dA_{\parallel}$ и $dA_{\perp}$ - компоненты элементарной работы при поступательном и вращательном движениях, соответственно. Учитывая (15), компоненты работы можно преобразовать к виду:

$$dA_{\parallel} = m\dot{r}(\ddot{r} - r\varphi^2)dt, \quad dA_{\perp} = \vec{M}\varpi dt = mr(2\dot{r}\varphi + r\dot{\varphi})\varphi dt = mr\dot{r}\varphi\dot{\Phi}dt. \tag{20}$$

Из (20) выводим:

$$dA = dA_{\parallel} + dA_{\perp} = d\left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\varphi^2)\right] = 0, \tag{21}$$

где учтено равенство (11).

В соответствии со сказанным выше, при движении по инерции должны выполняться условия $dA_{\perp} = 0, \quad dA_{\parallel} = 0$, из которых, согласно (20), следует, что $\vec{M} = 0$. Отсюда, в силу уравнения моментов, вытекает закон сохранения момента импульса $\vec{L} = const$.

При $\vec{L} = 0$, в силу (12), $r = 0$ либо $\varphi = 0$. Первый случай ($r = 0$), описывает состояние частицы, покоящейся в начале координат ($r = 0, \quad \dot{r} = 0, \quad v_0 = 0$, см. (11)). Во втором случае ($\varphi = 0$) $\varphi = const$ и, в силу (11), $\dot{r} = \pm v_0$, т. е. приходим к поступательной инерции: $\vec{v} = const$, причем $\varphi - \varphi = 0$ при $\dot{r} = v_0$, т. е. $r = v_0 t + r_0$ и $\varphi - \varphi = \pi$ при $\dot{r} = -v_0$, т. е. $r = -v_0 t + r_0$ (см. (17)). Как видим, частица движется равномерно и прямолинейно, т. е. является свободной: $\vec{F} = 0$. Отметим, что в рассматриваемом случае начало координат лежит на траектории движения частицы.

При $\vec{L} \neq 0$, в силу (12), $L = mr^2\varphi = const \neq 0, \quad r \neq 0$ и поэтому $\varphi = \dfrac{L}{mr^2}$. В силу (11)

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} = v_0^2. \tag{22}$$

При этом, в силу (15), $\dot{L} = mr\dot{r}\dot{\Phi} = 0$. Значит, $r = const \neq 0$ либо $\varphi = const$.

В первом случае ($r = const \neq 0$) из (17) находим: $\varphi - \varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}, \quad r\varphi = \pm v_0$. Получаем, таким образом, равномерное вращение частицы по окружности:

$$r = r_0, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \omega = \pm\frac{v_0}{r_0}, \quad \varphi = \varphi \pm \frac{\pi}{2},$$

$r_0 = \dfrac{|L|}{mv_0}$ — радиус окружности. Согласно (13) и (16),

$$\vec{n} = \mp\vec{e}_{\vec{r}} = [\vec{m}\vec{e}_{\vec{v}}], \quad \vec{e}_{\vec{v}} = \omega\frac{r_0}{v_0}\vec{n} = \pm\vec{n}. \tag{23}$$

Поэтому, учитывая равенство $\dot{\Phi} = \varphi$, с помощью (14) и (23) получаем: с одной стороны,

$$\vec{F} = mv_0\varphi\vec{n} = -m\omega^2 r_0\vec{e}_{\vec{r}} = -k\vec{r}, \quad k = m\omega^2, \tag{24}$$

а с другой —

$$\vec{F} = mv_0\omega[\vec{m}\vec{e}_{\vec{v}}] = -m\omega[\vec{v}\vec{m}] = m[\vec{v}\vec{B}], \quad \vec{B} = -\omega\vec{m} = -\varpi = const. \tag{25}$$

Как видим, на частицу действует центростремительная сила. Но ее работа, как и должно быть, обращается в нуль: $dA = \vec{F}d\vec{r} = -kd\left(\frac{\vec{r}^2}{2}\right) = 0$ (т. к. $\vec{r}^2 = r_0^2 = const$). При этом одновременно равны нулю компоненты работы, отвечающие вращательному и поступательному движениям: $dA_\perp = 0, \quad dA_\parallel = 0$. Отметим, что, согласно (25), сила $\vec{F}$ совпадает с силой Лоренца, в которой заряд частицы заменяется на ее массу, а магнитная индукция $\vec{B}$ совпадает с точностью до знака с угловой скоростью ϖ.

Мы получили, таким образом, пример **вращательной инерции**: равномерное движение частицы по окружности радиуса r_0 ($\dot{v} = 0, \quad \dot{\varphi} = \varphi = \omega = const \neq 0$) является движением по инерции. При вращательном движении по инерции $L = const \neq 0, \quad \varphi = \omega = \pm\frac{v_0}{r_0} = const \neq 0$. Подчеркнем, что **при вращательной инерции на частицу действует центростремительная сила, причем эта сила работы не совершает**. Вращательное движение по инерции сопровождается появлением силового поля $\vec{B}$, аналогичного полю магнитной индукции.

Обратимся теперь к случаю $\varphi = const$, который отвечает поступательному движению по инерции. Исключая φ из равенств $r\varphi = v_0\sin(\varphi - \varphi)$ (17) и $\varphi = \frac{L}{mr^2}$, получим:

$$r = \frac{L}{mv_0}\frac{1}{\sin(\varphi - \varphi)}.$$

Начальное условие $r = r_0$ при $\varphi = \varphi_0$ дает: $r_0 = \frac{L}{mv_0}\frac{1}{\sin(\varphi - \varphi_0)}$. Отсюда и из предыдущего выражения следует:

$$r = r_0\frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{\sin(\varphi - \varphi)}.$$

Для определения φ получается уравнение:

$$\varphi = \frac{v_0}{r_0}\frac{\sin^2(\varphi - \varphi)}{\sin(\varphi - \varphi_0)} \quad \to \quad \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \varphi)} = -\frac{v_0}{r_0}\frac{dt}{\sin(\varphi_0 - \varphi)}.$$

Интегрирование этого уравнения с начальным условием $\varphi = \varphi_0$ при $t = t_0$ (при этом также $r = r_0$) дает: $\mathrm{ctg}(\varphi - \varphi) - \mathrm{ctg}(\varphi_0 - \varphi) = \frac{v_0}{r_0}\frac{t - t_0}{\sin(\varphi_0 - \varphi)}$. Отсюда

$$\varphi - \varphi = \mathrm{arcctg}\left[\mathrm{ctg}(\varphi_0 - \varphi) + \frac{v_0}{r_0}\frac{t - t_0}{\sin(\varphi_0 - \varphi)}\right]. \tag{26}$$

Перейдем к решению уравнения (22). Полагая, что выполняется условие $v_0^2 > \frac{L^2}{m^2r^2}$, запишем это уравнение в виде:

$$\frac{rdr}{\sqrt{m^2v_0^2r^2 - L^2}} = \pm\frac{dt}{m} \quad \to \quad d\sqrt{m^2v_0^2r^2 - L^2} = \pm mv_0^2dt.$$

Его решение, подчиняющееся указанному выше условию, имеет вид:

$$\sqrt{m^2v_0^2r^2 - L^2} = \sqrt{m^2v_0^2r_0^2 - L^2} \pm mv_0^2(t - t_0). \tag{27}$$

Здесь при $t - t_0 > 0$ нужно брать верхний знак, а при $t - t_0 < 0$ — нижний. Равенства (26) и (27) определяют искомые зависимости $\varphi = \varphi(t)$ и $r = r(t)$. Эти равенства описывают поступательное движение по инерции в случае, когда траектория движения частицы не проходит через начало координат (и, следовательно, момент импульса частицы $\vec{L}$ относительно начала координат отличен от нуля). Отметим, что описание поступательного движения при $\vec{L} \neq 0$ оказалось значительно более сложным, чем при $\vec{L} = 0$. Это обусловлено тем, что в последнем случае радиус-вектор частицы изменяется только по длине, а в первом — изменяется также и по направлению. Однако в обоих случаях частица движется равномерно и прямолинейно, т. е. является свободной.

В заключение сформулируем **законы движения частицы по инерции**.

Закон поступательной инерции: точечная частица сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие со стороны внешней силы не выведет ее из этого состояния. Математическая формулировка поступательной инерции:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{F} = 0 \quad \to \quad \vec{v} = const. \tag{28}$$

Закон вращательной инерции: точечная частица движется равномерно по окружности ($v = const, \quad \dot{\varphi} = const$) до тех пор, пока на частицу не подействует внешняя сила, совершающая над нею работу. Существенно, что при вращательном движении по инерции на частицу действует **центростремительная сила**, которая не совершает работы над частицей (условием вращательного движения по инерции и является равенство нулю работы центростремительной силы, действующей на частицу). Физическая ситуация характеризуется тем, что в каждый момент времени в пространстве имеются две выделенные точки — точка, в которой находится частица, и центр кривизны траектории движения частицы, первая играет роль источника силового поля (силового центра), а вторая является стоком поля. Этот силовой центр существенно отличается от силового центра, представляющую массивную точечную частицу в классической механике. Отличие состоит в том, что силовое поле, создаваемое частицей в классической механике, является потенциальным, способным совершать работу. Во вращательном движении по инерции возникает принципиально иное поле — непотенциальное, действие которого на частицу аналогично действию силы Лоренца в электродинамике. Математическая формулировка вращательной инерции:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{F} \neq 0, \quad \textit{но} \quad \vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = 0, \quad dA = 0, \quad \to \quad |\vec{v}| = const \neq 0, \quad \dot{\varphi} \neq 0. \tag{29}$$

Из сравнения (28) и (29) видно, что можно сформулировать единый закон движения частицы по инерции, объединяющий оба вида движения — поступательное и вращательное, а именно: частица движется по инерции в некоторой системе отсчета, если в этой системе отсчета одновременно выполняются соотношения:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad dA \equiv \vec{F}d\vec{r} = 0, \quad \vec{M} \equiv [\vec{r}\vec{F}] = 0. \tag{30}$$

Закон поступательной инерции (28) получается из (30) при $\vec{F} = 0,$ а закон вращательной инерции (29) — при $\vec{F} \neq 0$.

Согласно первому закону Ньютона, существует такая система отсчета, называемая инерциальной, в которой тело, предоставленное самому себе, находится в состоянии покоя либо движется равномерно и прямолинейно. В классической механике инерциальные системы отсчета (ИСО) играют особую роль: это именно те системы отсчета, в которых, по предположению, справедливы уравнения движения. При описания движения в неинерциальных системах отсчета в уравнениях динамики появляются особые силы — силы инерции, учитывающие ускорение неинерциальных систем отсчета относительно инерциальных. Поступательная инерция — это единственный вид движения по инерции, допускаемый классической механикой.

Очевидно, что поступательная инерция имеет заведомо приближенный характер: она имеет место с некоторой точностью лишь на малых участках траектории, когда движение можно считать приближенно равномерным и прямолинейным. Главным видом движения, обеспечивающим стабильность Вселенной, является, очевидно, вращательное движение по инерции.

3. Движение по инерции в движущейся системе отсчета. Вращательно-поступательная инерция

Чтобы установить, как выглядит вращательное движение частицы по инерции, происходящее в системе отсчета K, с точки зрения наблюдателя, движущегося относительно K равномерно и прямолинейно, введем систему отсчета K', которая движется со скоростью $\vec{V}_0 = const$ относительно K. Считаем, что радиусы-векторы, $\vec{r}$ и $\vec{r}'$, и временные координаты, t и t', частицы в системах отсчета K и K' связаны между собой преобразованиями Галилея:

$$\begin{aligned} &\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}_0, \\ &t = t', \end{aligned} \tag{31}$$

где $\vec{R}_0 = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t$, $\vec{r}_0 = const$, $\vec{R}_0$ — радиус-вектор, соединяющий точки O и O' — начала систем отсчета K и K'. Для простоты ограничимся случаем, когда соответствующие оси систем отсчета K и K' параллельны между собой, а точка O' перемещается в пространстве, оставаясь в плоскости P, которая совпадает с плоскостью xy. Примем, что в системе отсчета K частица движется по окружности радиуса a ($a = const$) с угловой скоростью ω ($\omega = const$); ее радиус-вектор и вектор импульса имеют вид (см. (10) и (12)):

$$\vec{r} = a\vec{e}_r, \quad \vec{p} = ma\omega\vec{n}, \quad \vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \omega = \pm\frac{|\vec{L}|}{ma^2}. \tag{32}$$

Учитывая (13), (31) и (32), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &d\vec{r}' = d\vec{r} - \vec{V}_0 dt, \\ &\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \vec{v} - \vec{V}_0 = a\omega\vec{n} - \vec{V}_0, \quad \dot{\vec{v}}' = \dot{\vec{v}} = -a\omega^2\vec{e}_r, \\ &\vec{F}' = m\dot{\vec{v}}' = -ma\omega^2\vec{e}_r, \quad \vec{F}' = \vec{F}. \end{aligned} \tag{33}$$

Используя (32) и разложение вектора скорости $\vec{V}_0$ относительного движения систем отсчета на поступательную и вращательную составляющие,

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_{0\parallel} + \vec{V}_{0\perp}, \quad \vec{V}_{0\parallel} = (\vec{V}_0\vec{e}_r)\vec{e}_r, \quad \vec{V}_{0\perp} = (\vec{V}_0\vec{n})\vec{n},$$

приходим к следующим выражениям для компонент вектора элементарного перемещения частицы в системе отсчета K':

$$d\vec{r}_\parallel' = d\vec{r}_\parallel - (\vec{V}_0\vec{e}_r)\vec{e}_r dt, \quad d\vec{r}_\perp' = d\vec{r}_\perp - (\vec{V}_0\vec{n})\vec{n}dt. \tag{34}$$

Компоненты элементарной работы dA' в системе отсчета K' имеют вид:

$$\begin{aligned} &dA_\parallel' = \vec{F}' d\vec{r}_\parallel' = -m\dot{\vec{v}}(\vec{V}_0\vec{e}_r)\vec{e}_r dt = ma\omega^2(\vec{V}_0\vec{e}_r)dt, \\ &dA_\perp' = \vec{F}' d\vec{r}_\perp' = -m\dot{\vec{v}}(\vec{V}_0\vec{n})\vec{n}dt = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

С помощью (33) вычислим кинетическую энергию частицы в системе отсчета K' и ее приращение:

$$\begin{aligned} &K' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} = \frac{m}{2}\left(a^2\omega^2 + V_0^2 - 2a\omega\vec{V}_0\vec{n}\right), \\ &dK' = ma\omega^2(\vec{V}_0\vec{e}_r)dt. \end{aligned} \tag{36}$$

Как видно из (35) и (36), в системе отсчета K' кинетическая энергия частицы не сохраняется. Ее приращение dK' пропорционально скорости V_0 относительного движения систем отсчета, причем

$$dK' = dA_\parallel' = ma\omega^2(\vec{V}_0\vec{e}_r)dt, \tag{37}$$

т. е. величина dK' зависит только от поступательной компоненты вектора скорости $\vec{V}_0$.

Вычислим моменты импульса и силы в системе отсчета K' относительно точки O':

$$\vec{L}_{\vec{r}'}' = [\vec{r}', \vec{p}'] \text{ и } \vec{M}_{\vec{r}'}' = [\vec{r}', \vec{F}'],$$

и относительно точки O:

$$\vec{L}_{\vec{r}}' = [\vec{r}, \vec{p}'] \text{ и } \vec{M}_{\vec{r}}' = [\vec{r}, \vec{F}'].$$

Приведенные моменты связаны между собой равенствами:

$$\vec{L}'_{\vec{r}'} = \vec{L}'_{\vec{r}} - [\vec{R}_0, \vec{p}'], \quad \vec{L}'_{\vec{r}} = \vec{L} - m[\vec{r}, \vec{V}_0], \quad \vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = ma^2\omega\vec{m},$$
$$\vec{M}'_{\vec{r}'} = \vec{M}'_{\vec{r}} - [\vec{R}_0, \vec{F}'], \quad \vec{M}'_{\vec{r}} = [\vec{r}, \vec{F}] \equiv \vec{M} = 0. \tag{38}$$

Имеют место следующие формулы:

$$[\vec{R}_0, \vec{p}'] = m\ (\vec{R}_0\vec{e}_r)(a\omega - \vec{V}_0\vec{n}) + (\vec{R}_0\vec{n})(\vec{V}_0\vec{e}_r)\ \vec{m},$$

$$[\vec{r}, \vec{V}_0] = a(\vec{V}_0\vec{n})\vec{m}, \quad [\vec{R}_0, \vec{F}'] = ma\omega^2(\vec{R}_0\vec{n})\vec{m}.$$

Используя приведенные выше соотношения, нетрудно убедиться в том, что моменты импульса и силы подчиняются уравнениям:

$$\frac{d\vec{L}'_{\vec{r}'}}{dt} = \vec{M}'_{\vec{r}'}, \quad \frac{d\vec{L}'_{\vec{r}}}{dt} = \vec{M}'_{\vec{r}} + [\vec{V}_0, \vec{p}'], \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \tag{39}$$

где $[\vec{V}_0, \vec{p}'] = ma\omega(\vec{V}_0\vec{e}_r)\vec{m}$.

Как видно из приведенных соотношений,

$$\vec{M}'_{\vec{r}'} \neq 0, \quad \vec{L}'_{\vec{r}} = \vec{L} + ma(\vec{V}_0\vec{n})\vec{m}, \quad \frac{d\vec{L}'_{\vec{r}}}{dt} = ma\omega(\vec{V}_0\vec{e}_r)\vec{m} \neq 0. \tag{40}$$

Значит, моменты импульса $\vec{L}'_{\vec{r}'}$ и $\vec{L}'_{\vec{r}}$ не сохраняются. Момент импульса $\vec{L}'_{\vec{r}}$ сохраняется лишь при $\vec{V}_0 = 0$, т. е. при условии, что системы отсчета K и K' покоятся друг относительно друга (при этом вектор $\vec{r}_0 = const$ может быть произвольным).

Здесь уместно отметить следующее важное обстоятельство. Согласно (39), момент импульса $\vec{L}'_{\vec{r}}$ изменяется под действием момента силы $\vec{M}'_{\vec{r}} + [\vec{V}_0, \vec{p}']$ и дополнительного вращательного момента $[\vec{V}_0, \vec{p}'] \equiv \Delta\vec{M}'$, который обусловлен движением систем отсчета K и K' друг относительно друга. Вычислим работу $dA_{доп}$, совершаемую дополнительным моментом $\Delta\vec{M}'$ при угловом перемещении
$d\varphi = \omega\vec{m}dt$:

$$dA_{доп} \equiv \Delta\vec{M}' d\varphi = ma\omega^2(\vec{V}_0\vec{e}_r)dt.$$

Из сравнения последнего выражения с (35) видно, что величина $dA_{доп}$ совпадает в точности с работой $dA' = dA'_{\|}$. Отсюда и на основании (37) можно заключить, что несохранение кинетической энергии частицы в системе отсчета K' обусловлено тем, что при движении K' относительно K возникает действующий на частицу дополнительный вращательный момент $\Delta\vec{M}'$, благодаря чему производится дополнительная работа $dA_{доп} = dA'_{\|}$. Среднее значение работы $\bar{A}'$, совершаемой за период движения $T = \frac{2\pi}{\omega}$, определим по формуле: $\bar{A}' = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dA'}{dt} dt$. Нетрудно проверить, что $\bar{A}' = 0$ для любого начального момента времени t_0.

Очевидно, что при $\vec{V}_0 = 0$ движение частицы в системе отсчета K' происходит по окружности радиуса a, причем центр окружности находится в точке $\vec{r}' = -\vec{r}_0$. Но при $\vec{V}_0 \neq 0$ траектория движения частицы в системе отсчета K' представляет собой незамкнутую кривую. Установим вид траектории в частном случае, когда $\vec{V}_0 = (V_0, 0)$, $\vec{r}_0 = (0, -a)$, причем $\varphi_0 = -\pi/2$, $\omega > 0$ (см.(32)). В этом случае траектория движения частицы в системе отсчета K описывается уравнениями $x = a\sin\omega t$, $y = -a\cos\omega t$, а в K' — уравнениями (см.(31))

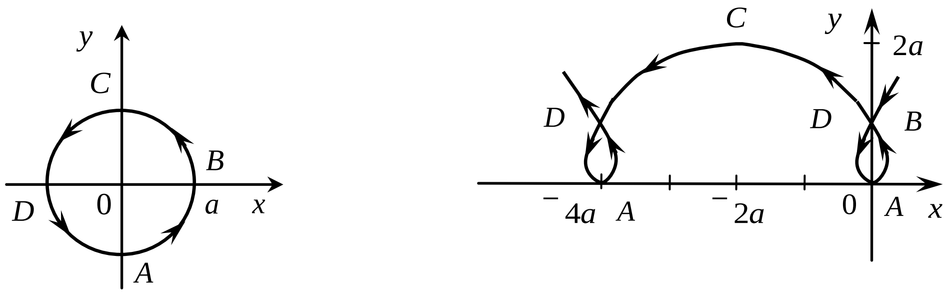
$$x' = a\left(\sin\omega t - \frac{V_0}{a}t\right), \quad y' = a(1 - \cos\omega t). \tag{41}$$

Кривая, описываемая системой уравнений (41), называется трохоидой (см. [15]). Пусть $\frac{V_0}{a\omega} < 1$. Тогда в окрестности точки $x' = 0$, $y' = 0$ траектория движения представляет собой параболу

$y' = cx'^2$, $c = \dfrac{1}{2a}\left(1 - \dfrac{V_0}{a\omega}\right)^{-2}$. Положив $\dfrac{V_0}{a\omega} = \dfrac{2}{\pi}$, с помощью уравнений (41) получаем следующую таблицу:

ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y'	0	a	$2a$	a	0
x'	0	0	$-2a$	$-4a$	$-4a$

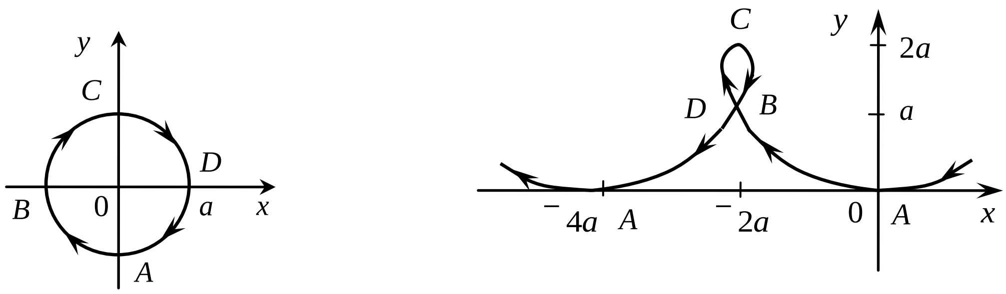
Схематические графики траектории движения частицы представлены на рис. 1 a (в системе отсчета K) и на рис. 1 b (в системе отсчета K').



a *b*

Рис. 1.

Траектория движения частицы в системе отсчета K представляет собой окружность радиуса a (рис. 1 a), а в системе K' — трохоиду (рис. 1 b). Окружности $ABCDA$ отвечает незамкнутая кривая $A'B'C'D'A''$. Движению частицы в системе отсчета K вдоль полуокружностей DAB и BCD соответствует в системе отсчета K' движение вдоль замкнутой кривой $D''A'B'$ и кривой $B'C'D'$, соответственно. Существенное различие формы кривых $D''A'B'$ и $B'C'D'$ объясняется тем, что при движении частицы вдоль полуокружности DAB направление скорости частицы совпадает с направлением скорости системы отсчета K' относительно K, а при движении вдоль BCD указанные направления скоростей противоположны. Положения частицы, соответствующие точкам A' и A'', разделены во времени интервалом, равным периоду T движения частицы в системе отсчета K.



a *b*

Рис. 2.

Схематические графики траектории при $\omega < 0$ и $\dfrac{V_0}{a|\omega|} = \dfrac{2}{\pi}$ приведены на рис. 2.

Следует подчеркнуть, что траектория движения частицы, движущейся по инерции, в системе отсчета K' является плоской кривой лишь при специальном выборе параметров задачи. В общем случае траекторией будет сложная незамкнутая пространственная кривая.

Отметим, что сила, действующая на частицу в системе отсчета K', может быть записана в виде $\vec{F}' = -ma\omega^2 \dfrac{\vec{r}' + \vec{R}_0}{|\vec{r}' + \vec{R}_0|}$. Из этого выражения видно, что сила $\vec{F}'$ направлена к точке O — центру кривизны траектории, которая является стоком силового поля, порождаемого частицей при ее движении по инерции.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в данном разделе представление о движении по инерции существенно расширено по сравнению с предыдущим разделом. Согласно полученным нами результатам, если в системе отсчета K происходит вращательное движение частицы по инерции, то с точки зрения наблюдателя, движущегося равномерно и прямолинейно относительно K, движение по инерции представляет собой суперпозицию поступательного и вращательного движений. Такое движение естественно назвать **вращательно-поступательной инерцией**. С помощью преобразований Галилея показано, что при вращательно-поступательной инерции кинетическая энергия частицы не сохраняется, так как работа dA', совершаемая силой $\vec{F}'$ над частицей, отлична от нуля, и траектория частицы является незамкнутой кривой. Но при этом среднее по периоду движения T значение работы обращается в нуль.

4. Вращательная инерция системы двух частиц

Движение частицы по инерции несложно обобщить на случай многочастичной системы. Рассмотрим движение системы n точечных частиц, при котором выполняются соотношения

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i, \quad dA_i \equiv \vec{F}_i d\vec{r}_i = 0, \quad \vec{M}_i \equiv [\vec{r}_i \vec{F}_i] = 0 \tag{42}$$

для всех частиц, т. е. $i = 1,...,n$. Здесь $\vec{r}_i$, m_i и $\vec{p}_i$ — радиусы-векторы, массы и векторы импульса частиц; $\vec{F}_i$ — вектор силы, действующей на частицу i со стороны всех остальных частиц рассматриваемой системы. Соотношения (42) описывают такое состояние движения n-частичной системы, в котором каждая частица движется по инерции. Движение многочастичной системы, подчиняющееся равенствам (42), представляет собой простейший пример движения по инерции многочастичной системы частиц.

Для начала рассмотрим случай двухчастичной системы ($n = 2$). Как и в разделе 2, движение частиц описываем относительно некоторой системы отсчета K и будем считать, что движение происходит в плоскости P, которая совпадает с плоскостью xy декартовой системы координат, связанной с системой отсчета K. Обозначим через $\vec{R}_C$ радиус-вектор центра масс частиц 1 и 2:

$$\vec{R}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{43}$$

Дифференцируя обе части последнего равенства дважды по времени и используя первое из равенств (42), получаем уравнение

$$\ddot{\vec{R}}_C = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m_1 + m_2} = 0, \tag{44}$$

при выводе которого учтено условие замкнутости рассматриваемой системы: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

Введем систему отсчета K', декартовы оси координат которой параллельны осям системы отсчета K, а начало координат совпадает с точкой центра масс, радиус-вектор которой дается формулой (43) и которую обозначим через O'. Радиусы-векторы частиц в системе отсчета K', $\vec{r}_1'$ и $\vec{r}_2'$, определяются из равенств: $\vec{r}_1 = \vec{R}_C + \vec{r}_1', \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_C + \vec{r}_2'$. Отсюда и из (43) получаем:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R}_C = \frac{\mu}{m_1}\vec{R}, \quad \vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{R}_C = -\frac{\mu}{m_2}\vec{R}, \tag{45}$$

где $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1' - \vec{r}_2', \quad \mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса системы двух частиц.

На основании (44) и (45) силы, действующие на частицы 1 и 2 в системе отсчета K', можно представить в следующем виде:

$$\vec{F}_1' = m_1\ddot{\vec{r}}_1' = \mu\ddot{\vec{R}}, \quad \vec{F}_2' = m_2\ddot{\vec{r}}_2' = -\mu\ddot{\vec{R}}, \quad \vec{F}_i' = \vec{F}_i, \quad i = 1,2. \qquad (46)$$

Отметим, что силы, входящие в (42) и (46), мы рассматриваем не как внешние силы, действующие на частицы извне. Это силы, действующие внутри рассматриваемой системы, которая находится в состоянии движения по инерции. В классической механике предполагается существование единственного вида движения по инерции — поступательной инерции. Факт устойчивости окружающего нас мира (атомов и молекул, планет и галактик) свидетельствует о том, что причиной устойчивости является существование вращательной инерции, т. е. стабильность реальных физических систем объясняется не силовым взаимодействием между ними, а является следствием наличия особого вида инерции. В квантовой механике устойчивость атома объясняется тем, что в микромире действуют особые, квантовые законы, согласно которым атомные электроны находятся в особых, стационарных состояниях. По-видимому, устойчивость атомов может быть понята и на основе классических законов: нужно лишь осознать существование вращательной инерции, благодаря которой атомные электроны, несмотря на ускоренное движение, не теряют энергию на излучение.

Приведем формулы для импульсов частиц в системе отсчета K', $\vec{P}_i' = m_i\dot{\vec{r}}_i'$, а также моментов импульсов, $\vec{L}_i' = [\vec{r}_i'\vec{P}_i']$, и моментов сил, $\vec{M}_i' = [\vec{r}_i'\vec{F}_i']$, относительно точки O' $(i = 1,2)$:

$$\vec{P}_1' = \mu\dot{\vec{R}}, \quad \vec{P}_2' = -\mu\dot{\vec{R}}, \quad \vec{L}_i' = \frac{\mu^2}{m_i}[\vec{R}\dot{\vec{R}}], \quad \vec{M}_i' = \frac{\mu^2}{m_i}[\vec{R}\ddot{\vec{R}}]. \qquad (47)$$

В силу (47) результирующие импульсы и моменты импульсов и сил выражаются формулами:

$$\vec{P}' = 0, \quad \vec{L}' = \mu[\vec{R}\dot{\vec{R}}], \quad \vec{M}' = \mu[\vec{R}\ddot{\vec{R}}]. \qquad (48)$$

Согласно (47) и (48),

$$\vec{L}_k' = \frac{\mu}{m_k}\vec{L}', \quad \vec{M}_k' = \frac{\mu}{m_k}\vec{M}', \quad \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'.$$

Удобно использовать полярные координаты вектора $\vec{R}$, $\vec{R} = (R, \varphi_R)$, и обозначения $\vec{R} = R\vec{e}_R$, $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$. В этих обозначениях

$$\begin{aligned} &\vec{V} = \vec{V}_\parallel + \vec{V}_\perp, \quad \vec{V}_\parallel = \dot{R}\vec{e}_R, \quad \vec{V}_\perp = R\dot{\varphi}_R\vec{n}_R, \\ &\dot{\vec{V}} = (\ddot{R} - R\dot{\varphi}_R^2)\vec{e}_R + (2\dot{R}\dot{\varphi}_R + R\ddot{\varphi}_R)\vec{n}_R, \\ &\vec{L}_i' = L_i'\vec{m}_R, \quad L_i' = \frac{\mu}{m_i}L', \quad \vec{M}_i' = M_i'\vec{m}_R, \quad M_i' = \frac{\mu}{m_i}M', \\ &L' = \mu R^2\dot{\varphi}_R, \quad M' = \mu R(2\dot{R}\dot{\varphi}_R + R\ddot{\varphi}_R). \end{aligned} \qquad (49)$$

Здесь

$$\vec{e}_R = (\cos\varphi_R, \sin\varphi_R), \quad \vec{n}_R = \dot{\vec{e}}_R / \dot{\varphi}_R = (-\sin\varphi_R, \cos\varphi_R), \quad \vec{m}_R \equiv [\vec{e}_R\vec{n}_R], \qquad (50)$$

$\vec{e}_R$ — орт вектора $\vec{R}$; компоненты вектора скорости $\vec{V}_\parallel$ и $\vec{V}_\perp$ описывают, соответственно, поступательное движение (движение вдоль вектора $\vec{R}$) и вращательное движение (вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к плоскости P). Векторы $\vec{e}_R$, $\vec{n}_R$ и $\vec{m}_R$ образуют базисную правовинтовую тройку взаимно перпендикулярных ортов, причем вектор $\vec{m}_R$ перпендикулярен к плоскости P.

Вычислим полную работу dA, совершаемую силами, действующими на частицы, и работу $dA_\perp$ этих сил при вращательном движении:

$$dA = dA_1 + dA_2, \quad dA_\perp = dA_{1\perp} + dA_{2\perp}, \quad dA_i = \vec{F}_i'd\vec{r}_i', \quad dA_{i\perp} = \vec{F}_i'd\vec{r}_{i\perp}'.$$

Здесь, в силу (44) и (49),

$$d\vec{r}_i{}' = \vec{v}_i{}' dt, \quad \vec{v}_i{}' = \dot{\vec{r}}_i{}', \quad \vec{v}_1{}' = \frac{\mu}{m_1}\vec{V}, \quad \vec{v}_2{}' = -\frac{\mu}{m_2}\vec{V},$$
$$d\vec{r}_{i\perp}{}' = \vec{v}_{i\perp}{}' dt, \quad \vec{v}_{1\perp}{}' = \frac{\mu}{m_1}\vec{V}_\perp, \quad \vec{v}_{2\perp}{}' = -\frac{\mu}{m_2}\vec{V}_\perp, \quad i = 1,2. \tag{51}$$

Учитывая равенства (49) и (51), а также формулу $\vec{n}_R \equiv [\vec{m}_R \vec{e}_R]$, легко получить соотношение $\vec{v}_{i\perp}{}' = [\varpi_i \vec{R}]$, $i = 1,2$, где $\varpi_1 = \frac{\mu}{m_1}\varpi$, $\varpi_2 = -\frac{\mu}{m_2}\varpi$, $\varpi = \varphi_R \vec{m}_R$. Используя последние соотношения и равенства (45) и (47), получаем следующее представление:

$$dA_{i\perp} = \vec{F}_i' d\vec{r}_{i\perp}{}' = (\varpi_i[\vec{R}\vec{F}_i'])dt = (\vec{M}_i{}'\varpi)dt.$$

Приведем окончательные формулы для величин dA и $dA_\perp$:

$$dA_i = \frac{\mu}{m_i} dA, \quad dA = \mu\dot{\vec{V}}\vec{V}dt = dK', \quad K' = \frac{\mu}{2}V^2 = \frac{\mu}{2}(\dot{R}^2 + R^2\varphi_R^2),$$
$$dA_{i\perp} = \frac{\mu}{m_i} dA_\perp, \quad dA_\perp = (\vec{M}'\varpi)dt = M'\varphi_R dt, \quad M' = \mu R(2\dot{R}\varphi_R + R\dot{\varphi}_R) = \dot{L}', \quad L' = \mu R^2\varphi_R. \tag{52}$$

Во избежание недоразумений отметим, что величина L' в (49), (52) и последующих формулах данного раздела не является модулем вектора $\vec{L}'$; она имеет следующий смысл: $L' = \pm|\vec{L}'|$, где знаки $\pm$ означают два возможных направления вращения частицы. Следует подчеркнуть, что величины dA и $dA_\perp$ (52) — это не работа внешних сил, действующих на частицы. Понятие силы мы привыкли связывать с внешним воздействием на систему. Очевидно, что помимо обычных внешних сил, вызывающих ускоренное движение системы, в природе существуют особые силы — силы, связанные с вращательным движением физических систем по инерции. Характерная особенность этих сил состоит в том, что они не совершают работы, хотя и вызывают ускоренное движение. На существование такого рода сил указывает, в частности, неэквивалентность инерциальных систем отсчета (ИСО), движущихся друг относительно друга. Физическое неравноправие ИСО обусловлено тем, что физическое время, в котором происходит развитие системы, не совпадает с координатным временем, входящим в преобразования Лоренца. Изменение хода времени при переходе из одной системы отсчета в другую приводит к возникновению силового воздействия на частицы, которое, очевидно, нельзя рассматривать как внешнее.

Движение рассматриваемой системы по инерции описывается равенствами

$$dA = 0, \; \vec{M}' = 0. \tag{53}$$

Из (49) и (52) видно, что при этом $dA_i = 0, \quad \vec{M}_i{}' = 0, \quad i = 1,2,$ т. е. условия движения по инерции (см. (42)) выполняются для каждой частицы в отдельности. Согласно (52), условия (53) приводят к сохранению кинетической энергии и момента импульса:

$$K' = \frac{\mu}{2}(\dot{R}^2 + R^2\varphi_R^2) \equiv \frac{\mu}{2}V_0^2 = const, \quad L' = \mu R^2\varphi_R = const. \tag{54}$$

При $L' = 0$ имеются, в силу (54), две возможности: 1) $R = 0$ и 2) $\varphi_R = 0$. Случай 1 отвечает частице массой μ, покоящейся в начале координат: $R = 0, \quad \dot{R} = V_0 = 0$. В случае 2 $\varphi_R = const$, $\dot{R} = \pm V_0$, т. е. получается поступательное движение по инерции:

$$\vec{V} = \pm V_0\vec{e}_R, \quad \vec{R}(t) = R(t)\vec{e}_R, \quad R(t) = \pm V_0(t - t_0) + R_0, \tag{55}$$

где $\vec{e}_R = const, \quad R_0\vec{e}_R = \vec{R}(t_0)$ - начальное значение радиуса-вектора. Рассматриваемое движение по инерции характеризуется тем, что $\vec{L}' = 0$, т. е. частицы движутся вдоль прямой, проходящей через центр масс. Отметим, что в рассматриваемом случае движение по инерции может происходить бесконечно долго только в одном направлении, когда частицы удаляются друг от друга. При изменении направления движения (либо при обращении хода времени) движение по инерции происходит только до момента столкновения частиц, когда $R(t) = 0$ и движение частиц прекращается. Действительно, последняя из формул (55) справедлива только при $R(t) \geq 0$. Строго говоря, формулу для $R(t)$ нужно писать в виде ($\theta(x)$ — функция Хевисайда, $\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$, $\delta(x)$ — δ-функция Дирака):

$$R(t) = \pm V_0(t - t_0) + R_0 \;\; \theta \;\; \pm V_0(t - t_0) + R_0 \;\; + \;\; \mp V_0(t - t_0) - R_0 \;\; \theta \;\; \mp V_0(t - t_0) - R_0 \;.$$

Отсюда, очевидно,

$$\dot{R}(t) = \pm V_0 \theta \;\; \pm V_0(t - t_0) + R_0 \;\; \mp V_0 \theta \;\; \mp V_0(t - t_0) - R_0 \;, \quad \ddot{R}(t) = 2V_0^2 \delta \;\; \pm V_0(t - t_0) + R_0 \;. \qquad (56)$$

Как видно из (56), в момент времени t, определяемый равенством $\pm V_0(t - t_0) + R_0 = 0$, на частицу массой μ действует бесконечно большая сила $F = \mu \ddot{R}(t)$ и скорость $\dot{R}(t)$ меняет знак на противоположный. Физически это означает, что в указанный момент времени происходит столновение частиц, частицы останавливаются и затем продолжают движение, удаляясь друг от друга. Таким образом, при поступательном движении по инерции системы двух частиц прямой и обратный ход времени неравноправны. Если при прямом ходе времени частицы удаляются друг от друга, то их движение по инерции продолжается бесконечно долго. Но при обращении времени частицы сближаются и их движение по инерции, спустя конечный промежуток времени, прерывается столкновением, после которого частицы могут продолжать движение по инерции как угодно долго.

При $\vec{L}' \neq 0$, исключая φ_R согласно формуле (см. (52))

$$\varphi_R = \frac{L'}{\mu R^2} \qquad (57)$$

из выражения для кинетической энергии (54), приходим к уравнению:

$$\dot{R}^2 + \left(\frac{L'}{\mu R}\right)^2 = V_0^2. \qquad (58)$$

Согласно (58), движение по инерции возможно лишь при $\frac{|\vec{L}'|}{\mu R} \leq V_0$, т. е. при $R \geq \frac{|\vec{L}'|}{\mu V_0} \equiv R_0$, где R_0 - наименьшее значение модуля радиуса-вектора $\vec{R}$, при котором возможно движение по инерции. Область $R < R_0$ является запрещенной. Полагая, что $R = R(\varphi_R)$, вычисляем: $\dot{R} = \varphi_R \frac{dR}{d\varphi_R}$. Принимая во внимание равенство (57) и вводя обозначение $R = \frac{1}{\rho}$, получим: $\dot{R} = -\frac{L'}{\mu}\frac{d\rho}{d\varphi_R}$. С помощью последнего равенства уравнение (58) преобразуется к виду:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi_R}\right)^2 + \rho^2 = \left(\frac{\mu V_0}{L'}\right)^2. \qquad (59)$$

Вычисляем производную по φ_R от обеих частей последнего соотношения:

$$2\frac{d\rho}{d\varphi_R}\left(\frac{d^2\rho}{d\varphi_R^2} + \rho\right) = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения:

$$1) \;\; \frac{d\rho}{d\varphi_R} = 0 \;\; \text{и} \;\; 2) \;\; \frac{d^2\rho}{d\varphi_R^2} + \rho = 0. \qquad (60)$$

В случае 1 $\rho = const$. Из уравнений (57) и (59) выводим:

$$R = \frac{|\vec{L}'|}{\mu V_0} = R_0, \quad \varphi_R = \omega(t - t_0) + \varphi_{0R}, \quad \omega = \frac{L'}{\mu R_0^2}, \quad |\omega| = \frac{V_0}{R_0}. \qquad (61)$$

Мы пришли, таким образом, к вращательному движению по инерции. В системе отсчета K' частицы 1 и 2 движутся по концентрическим окружностям Γ_1 и Γ_2 (см. рис 3) с радиусами

$|\vec{r}_1'| = \dfrac{\mu}{m_1} R_0 \equiv R_1$ и $|\vec{r}_2'| = \dfrac{\mu}{m_2} R_0 \equiv R_2$, соответственно, с постоянной угловой скоростью ω. Центры окружностей совпадают с центром масс C системы частиц, движение частиц происходит таким образом, что расстояние между частицами сохраняется постоянным: $|\vec{r}_1' - \vec{r}_2'| = R_0 = R_1 + R_2$. Направление вращения определяется направлением вектора $\vec{L}'$, т. е. знаком угловой скорости φ_R, см. (57).

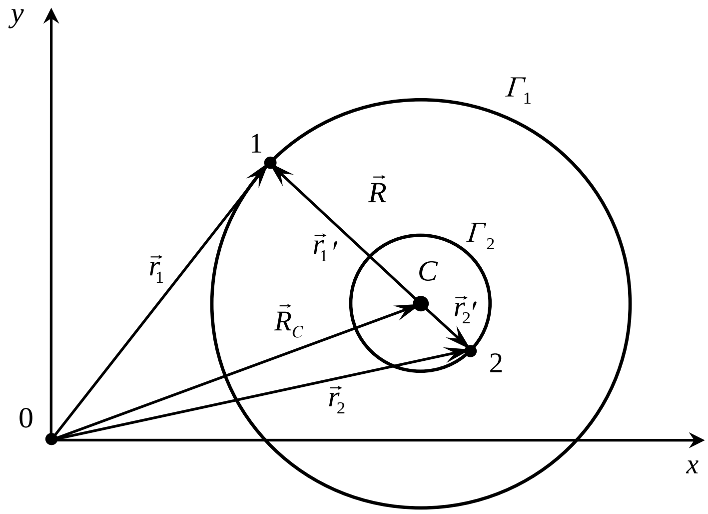


Рис. 3.
Окружности Γ_1 и Γ_2 изображают траектории движения частиц 1 и 2, C – центр масс системы частиц, $|\vec{R}| \equiv R_0 = const$ — расстояние между частицами 1 и 2 (считается, что $m_2 > m_1$).

Согласно (45) и (49),

$$\vec{V} = \omega R_0 \vec{n}_R, \quad \dot{\vec{V}} = -\omega^2 R_0 \vec{e}_R, \quad \vec{F}' = -\frac{(L')^2}{\mu R_0^3}\vec{e}_R. \tag{62}$$

Как видим, при вращательном движении по инерции возникает сила притяжения, действующая между частицами; вектор силы $\vec{F}'$ направлен перпендикулярно скорости частиц, и поэтому поле силы притяжения не является потенциальным (оно работы не совершает).

Отметим, что, используя равенство $\vec{e}_R = [\vec{n}_R \vec{m}_R]$, вектор силы можно представить в виде: $\vec{F}' = \mu[\vec{V}\vec{B}],\ \vec{B} = -\omega\vec{m}_R$. Получается так, что при вращательном движении частиц по инерции в пространстве порождается действующее на частицы силовое поле $\vec{B}$, которое и связывает частицы в единую систему. Поле $\vec{B}$, порождаемое вращательной инерцией, и является, очевидно, тем физическим полем, которое превращает пространство в физическую среду, называемую **эфиром**.

В случае 2 решение второго из уравнений (60) можно записать в виде:

$$\rho = a\cos(\varphi_R - \varphi_{0R}), \quad a, \varphi_{0R} = const.$$

Следовательно, функция $R = R(\varphi_R)$, подчиняющаяся условию $R(\varphi_{0R}) = R_0$, имеет вид:

$$R = \frac{R_0}{\cos(\varphi_R - \varphi_{0R})}. \tag{63}$$

Подставляя (63) в (57), приходим к уравнению:

$$\frac{d\varphi_R}{\cos^2(\varphi_R - \varphi_{0R})} = \omega dt.$$

Его решение, подчиняющееся условию $\varphi_R = \varphi_{0R}$ при $t = t_0$, дается формулой:

$$\varphi_R = \varphi_{0R} + arctg\ \omega(t - t_0)\ . \tag{64}$$

Из (63) и (64) следует соотношение:

$$R = R_0\sqrt{1+\omega^2(t-t_0)^2}. \qquad (65)$$

Согласно (64) и (65), при изменении времени от момента $t=t_0$ до $t\to\infty$ величина R изменяется от R_0 до ∞, а φ_R изменяется от φ_{0R} до $\varphi_{0R}+\dfrac{\pi}{2}$. Учитывая (49) и равенства

$$\dot{R} = V_0\sin(\varphi_R-\varphi_{0R}), \quad \varphi_R = \omega\cos^2(\varphi_R-\varphi_{0R}),$$

вытекающие из (63) — (65), легко убедиться в том, что

$$\dot{\vec{R}} = \vec{V} = V_0(-\sin\varphi_{0R},\cos\varphi_{0R}) \equiv \vec{V}_0.$$

Отсюда следует, что

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0(t-t_0), \quad \vec{R}_0 = R_0(\cos\varphi_{0R},\sin\varphi_{0R}), \quad \dot{\vec{V}} = 0, \qquad (66)$$

т. е. частица движется равномерно и прямолинейно. Таким образом, случай 2) (см.(60)) описывает поступательное движение по инерции. Это движение характеризуется тем, что полный момент импульса системы частиц $\vec{L}'\neq 0$ и поэтому обе частицы движутся по параллельным прямым, не проходящим через центр масс. Расстояние между указанными прямыми составляет R_0 и центр масс находится в области между ними. Модуль радиуса-вектора $\vec{R}$ возрастает от наименьшего значения R_0 при $t=t_0$ до ∞ при $t\to\infty$, при этом вектор $\vec{R}$ поворачивается в пространстве в области углов $(\varphi_{0R},\varphi_{0R}+\dfrac{\pi}{2})$. При обращении времени поворот вектора $\vec{R}$ происходит в обратном направлении в области $(\varphi_{0R},\varphi_{0R}-\dfrac{\pi}{2})$. В отличие от поступательного движения по инерции при $\vec{L}'=0$, в рассматриваемом случае движение по инерции может происходить бесконечно долго как при прямом, так и при обратном ходе времени.

5. Сравнение вращательной инерции системы двух частиц с движением согласно закону всемирного тяготения

Прежде всего, решение классической проблемы двух тел, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения, представим в форме, удобной для сопоставления с вращательным движением системы двух частиц по инерции.

Исходим из уравнений движения Ньютона для частиц с массами m_1 и m_2:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1, \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2, \qquad (67)$$

где $\vec{F}_1 = -\gamma m_1 m_2\dfrac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$, $\vec{F}_2=-\vec{F}_1$, γ — гравитационная постоянная. Уравнения (67) преобразуем к новым переменным $\vec{R}$ и $\vec{R}_C$, связанным с переменными $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ равенствами

$$\vec{R} = \vec{r}_1-\vec{r}_2, \quad \vec{R}_C = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}. \qquad (68)$$

В новых переменных получаем уравнения:

$$\ddot{\vec{R}}_C = 0, \quad \mu\ddot{\vec{R}} = \vec{F}, \qquad (69)$$

где $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ - приведенная масса, $\vec{F} = -\gamma\dfrac{m_1m_2}{R^2}\vec{e}_R$, $\vec{e}_R = \dfrac{\vec{R}}{R}$.

Первое из уравнений (69) описывает движение центра масс рассматриваемой системы частиц. Решение этого уравнения можно представить в виде:

$$\vec{R}_C = \vec{V}_C(t-t_0) + \vec{R}_C^{(0)}.$$

Здесь $\vec{V}_C = \dot{\vec{R}}_C = const$ — скорость движения центра масс, $\vec{R}_C^{(0)}$ - радиус-вектор центра масс в начальный момент времени $t=t_0$. Второе из уравнений (69), описывающее относительное движение частиц, эквивалентно уравнению движения фиктивной частицы с массой μ и радиусом-вектором $\vec{R}$ в поле $\vec{F}$ силового центра, помещенного в начале координат.

С помощью соотношений (см.(44))

$$\vec{r}_1 = \frac{\mu}{m_1}\vec{R} + \vec{R}_C, \quad \vec{r}_2 = -\frac{\mu}{m_2}\vec{R} + \vec{R}_C,$$

вытекающих из преобразований (68), вычислим импульсы частиц $\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i$, моменты импульсов $\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$ и моменты сил, действующих на частицы, $\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$, ($i = 1,2$):

$$\vec{p}_1 = \mu\dot{\vec{R}} + m_1\vec{V}_C, \quad \vec{p}_2 = -\mu\dot{\vec{R}} + m_2\vec{V}_C, \quad \vec{V}_C = \dot{\vec{R}}_C,$$

$$\vec{L}_1 = \frac{\mu^2}{m_1}[\vec{R}, \dot{\vec{R}}] + \mu[\vec{R}_C, \dot{\vec{R}}] + \mu[\vec{R}, \vec{V}_C] + m_1[\vec{R}_C^{(0)}, \vec{V}_C],$$

$$\vec{L}_2 = \frac{\mu^2}{m_2}[\vec{R}, \dot{\vec{R}}] - \mu[\vec{R}_C, \dot{\vec{R}}] - \mu[\vec{R}, \vec{V}_C] + m_2[\vec{R}_C^{(0)}, \vec{V}_C],$$

$$\vec{M}_1 = -\gamma\frac{m_1 m_2}{R^3}[\vec{R}_C, \vec{R}], \quad \vec{M}_2 = -\vec{M}_1.$$

Результирующие импульс $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, момент импульса $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ и момент сил $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ составляют:

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{V}_C, \quad \vec{L} = \mu[\vec{R}, \dot{\vec{R}}] + (m_1 + m_2)[\vec{R}_C^{(0)}, \vec{V}_C], \quad \vec{M} = 0. \tag{70}$$

Отметим, что в силу (69) и (70) выполняется уравнение моментов $\dot{\vec{L}} = \vec{M} = 0$. Следовательно, результирующий момент импульса сохраняется: $\vec{L} = const$. Используя равенства (49) и (50) и полагая, что $\vec{R}_C^{(0)} = 0$, с помощью (70) выводим следующее выражение:

$$\vec{L} = L\vec{m}_R, \quad L = \mu R^2 \dot{\varphi}_R = const. \tag{71}$$

Из второго из уравнений движения (69) вытекает следующий закон сохранения энергии:

$$\frac{\mu}{2}\dot{R}^2 + U_{ef}(R) = E_0 = const, \quad U_{ef}(R) = \frac{L^2}{2\mu R^2} - \gamma\frac{m_1 m_2}{R}. \tag{72}$$

Здесь $U_{ef}(R)$ — эффективная потенциальная энергия. При выводе закона сохранения энергии (72) было использовано равенство

$$\dot{\varphi}_R = \frac{L}{\mu R^2}, \tag{73}$$

вытекающее из закона сохранения момента импульса (71). Отметим, что

$$\min U_{ef}(R) = U_{ef}(R_*) = -\frac{L^2}{2\mu R_*^2} \equiv U_{ef}^*, \quad R_* = \frac{L^2}{\gamma\mu m_1 m_2}, \text{ причем } U_{ef}(R) = 0 \text{ при } R = \frac{R_*}{2}.$$

Полагая, что $R(t) = R[\varphi_R(t)]$ и, следовательно, $\dot{R} = \dot{\varphi}_R \frac{dR}{d\varphi_R}$, приходим к соотношению:

$$\dot{R} = -\frac{L}{\mu}\frac{d\rho}{d\varphi_R}. \tag{74}$$

При выводе последней формулы использовано равенство (73) и выполнена подстановка: $R = 1/\rho$. Используя (74), закон сохранения энергии (72) можно представить в виде:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi_R}\right)^2 + \rho^2 - \frac{2}{R_*}\rho = \frac{2\mu E_0}{L^2}. \tag{75}$$

Дифференцируя обе части последнего уравнения по φ_R, получаем соотношение

$$\frac{d\rho}{d\varphi_R}\left(\frac{d^2\rho}{d\varphi_R^2} + \rho - \frac{1}{R_*}\right) = 0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$1)\ \frac{d\rho}{d\varphi_R}=0\ \text{ и } 2)\ \frac{d^2\rho}{d\varphi_R^2}+\rho-\frac{1}{R_*}=0\,. \qquad (76)$$

Используя (49), легко показать, что второе из уравнений движения (69) распадается на систему уравнений:

$$\mu(\ddot{R}-R\varphi_R^2)=-\gamma\frac{m_1m_2}{R^2},\quad 2\dot{R}\varphi_R+R\varphi_R=0. \qquad (77)$$

При $R\neq 0,\ \ \varphi_R\neq 0$ второе из последних уравнений приводит к равенству $R^2\varphi_R=const$, из которого следует закон сохранения момента импульса (71). Первое же уравнение (77) с помощью равенств (71), (74) и подстановки $R=1/\rho$ преобразуется ко второму из уравнений (76).

Согласно первому из уравнений (76), $\rho=\rho_0=const$. Постоянную ρ_0 можно определить из второго из уравнений (76): $\rho_0=\dfrac{1}{R_*}$. Следовательно, $R=R_*$ и в силу (73)

$$\varphi_R=\omega(t-t_0)+\varphi_{0R},\quad \omega=\frac{L}{\mu R_*^2}.$$

Мы получили, таким образом, равномерное движение частицы по окружности радиуса R_* с угловой скоростью ω.

Перейдем к рассмотрению второго из уравнений (76). Его общее решение можно записать в виде:

$$\rho=\frac{1}{R_*}+\frac{e}{R_*}\cos(\varphi_R-\varphi_{0R}), \qquad (78)$$

где e и φ_{0R} — постоянные интегрирования.

Подстановка (78) в (75) позволяет определить параметр e:

$$e=\sqrt{1+\frac{E_0}{|U_{ef}^*|}}\,,\ E_0\geq U_{ef}^*\,. \qquad (79)$$

Окончательно уравнение кривой, по которой движется частица с массой μ, энергией E_0 и моментом импульса L в поле центральной силы $\vec{F}=-\gamma\dfrac{m_1m_2}{R^2}\vec{e}_R$, можно записать в виде

$$R=\frac{R_*}{1+e\cos(\varphi_R-\varphi_{0R})}, \qquad (80)$$

где

$$R_*=\frac{L^2}{\gamma\mu m_1m_2},\ \ e=\sqrt{1+\frac{E_0}{|U_{ef}^*|}}\,,\ U_{ef}^*=-\frac{L^2}{2\mu R_*^2}\,. \qquad (81)$$

Формула (80) представляет собой уравнение конического сечения, R_* и e — фокальный параметр и эксцентриситет конического сечения (R_* — точка минимума эффективной потенциальной энергии $U_{ef}(R)$).

Уравнение для определения φ_R можно получить путем подстановки (80) в (73):

$$\frac{d\varphi_R}{\left(1+e\cos(\varphi_R-\varphi_{0R})\right)^2}=\frac{L}{\mu(R_*)^2}dt\,. \qquad (82)$$

Функция $\varphi_R=\varphi_R(t)$, удовлетворяющая начальному условию $\varphi_R(t_0)=\varphi_{0R}$, определяется соотношением

$$\int_{\varphi_{0R}}^{\varphi}\frac{dx}{(1+e\cos x)^2}=\frac{L}{\mu R_*^2}(t-t_0).$$

Для сравнения вращательного движения по инерции системы двух частиц с движением частиц, связанных между собой силами гравитации, ограничимся рассмотрением частного случая $E_0=\min U_{ef}(R)$, когда, согласно (79), $e=0$ и, следовательно, траекторией движения является окружность. В этом случае, согласно (80)–(82), частица движется по окружности радиуса $R_* = \dfrac{L^2}{\gamma\mu m_1 m_2}$ с угловой скоростью $\omega_* = \dfrac{L}{\mu R_*^2}$ под действием силы $F = \gamma\dfrac{m_1 m_2}{R_*^2}$, ее полная энергия составляет $E_0 = -\dfrac{L^2}{2\mu R_*^2}$. Учитывая равенство

$$\gamma m_1 m_2 = \frac{L^2}{\mu R_*} \tag{83}$$

(см. (81)), формулу силы можно записать в виде $F = \dfrac{L^2}{\mu R_*^3}$.

В случае же вращательного движения по инерции, согласно (61) и (62), частица движется по окружности радиуса $R_0 = \dfrac{L}{\mu V_0}$ с угловой скоростью $\omega_0 = \dfrac{L}{\mu R_0^2}$; частица обладает энергией $\dfrac{\mu V_0^2}{2} = \dfrac{L^2}{2\mu R_0^2} \equiv \tilde{E}_0$, на частицу действует сила $F = \dfrac{L^2}{\mu R_0^3}$.

Из сравнения представленных выше результатов следует, что

i) величины, описывающие вращательное движение по инерции и движение в потенциальном силовом поле, совпадают, если положить $R_* = R_0$;

ii) из последнего равенства получаем соотношение $\gamma m_1 m_2 = |L| V_0 = \dfrac{L^2}{\mu R_0}$, совпадающее с (83);

iii) единственное различие между приведенными выше величинами состоит в том, что величина E_0 отрицательна, а величина $\tilde{E}_0$ — положительна ($E_0 = -\tilde{E}_0$).

Это различие имеет глубокий смысл: оно является следствием принципиально различных подходов к описанию движения частиц в классической механике и в данной работе. Общепринятый подход основан на представлении о том, что финитное движение частицы в пространстве возможно лишь в поле потенциальной ямы, когда возникают естественным образом границы движения частицы и частица оказывается в особом, связанном состоянии — состоянии с отрицательной энергией. Закон всемирного тяготения постулирует существование гравитационного притяжения между частицами, описываемого потенциальным силовым полем. Это поле необходимо для того, чтобы в пространстве возникли потенциальные ямы, наличие которых обеспечивает появление границ движения и локализацию частиц.

В данной же работе мы исходим из того, что в природе имеется вращательное движение по инерции, которое и обеспечивает финитное движение частиц в пространстве. Благодаря вращательной инерции, связанные состояния частиц становятся возможными и в отсутствие силовых потенциальных полей; однако связанные состояния, образующиеся вследствие вращательной инерции, характеризуются тем, что энергии частиц остаются положительными. Гипотеза о существовании силовых потенциальных полей (например, гравитационного поля притяжения, действующего между частицами) становится излишней. Следует подчеркнуть, что в предлагаемом подходе связанные состояния частиц получаются на основе чисто кинематических соображений. Уравнения движения используются лишь для нахождения условий, при которых реализуется вращательная инерция.

6. Пример вращательного движения по инерции трехчастичной системы

Перейдем к рассмотрению движения по инерции системы, состоящей из трех классических точечных частиц. Как и в разделе 4, считаем, что движение частиц происходит в одной и той же плоскости P, лежащей в некоторой системе отсчета K. Введем радиус-вектор центра масс C,

$$\vec{R}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1,2,3} m_i \vec{r}_i, \quad m = \sum_{i=1,2,3} m_i, \tag{84}$$

и перейдем в новую систему отсчета K', начало декартовых координат которой совпадает с центром масс C, а оси координат параллельны соответствующим осям координатной системы, связанной с системой отсчета K. Умножая на m_i почленно обе части равенства

$$\vec{r}_i = \vec{R}_C + \vec{r}_i', \tag{85}$$

связывающего между собой радиусы-векторы частиц в системах отсчета K и K', затем суммируя по i левую и правую части полученного равенства и учитывая (84), получаем следующее соотношение связи между радиусами-векторами $\vec{r}_i'$ частиц в системе отсчета K':

$$\sum_{i=1,2,3} m_i \vec{r}_i' = 0\,. \tag{86}$$

Полагая рассматриваемую систему замкнутой, т. е. полагая $\sum_{i=1,2,3} \vec{F}_i = 0$, находим, что вектор $\vec{R}_C$ подчиняется уравнению $\ddot{\vec{R}}_C = 0$, решение которого можно представить в виде:

$$\vec{R}_C = \vec{V}_C(t - t_0) + \vec{R}_C^{(0)}, \tag{87}$$

где $\vec{V}_C = const$ — скорость движения центра масс, $\vec{R}_C^{(0)}$ — постоянная интегрирования.

Подставляя (85) в первое из соотношений (42) и используя (87), получаем:

$$\frac{d\vec{p}_i'}{dt} = \vec{F}_i', \quad \vec{p}_i' = m_i \dot{\vec{r}}_i', \quad \vec{F}_i' = \vec{F}_i, \quad i = 1,2,3. \tag{88}$$

Дифференцируя равенство (86) последовательно дважды по времени и используя (88), получаем дополнительные условия связи:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1,2,3} m_i \dot{\vec{r}}_i' = 0 \;\to\; \sum_{i=1,2,3} \vec{p}_i' = 0, \\ \sum_{i=1,2,3} m_i \ddot{\vec{r}}_i' = 0 \;\to\; \sum_{i=1,2,3} \dot{\vec{p}}_i' = \sum_{i=1,2,3} \vec{F}_i' = 0. \end{gathered} \tag{89}$$

Удобно перейти к полярным координатам радиуса-вектора $\vec{r}_i'$, $\vec{r}_i' = (r_i', \varphi_i)$, и ввести обозначения:

$$\vec{r}_i' = r_i' \vec{e}_i, \quad \vec{v}_i' = \dot{\vec{r}}_i'\,. \tag{90}$$

Используя эти обозначения, легко получить равенства, аналогичные (49):

$$\begin{gathered} \vec{v}_i' = \vec{v}_{i\parallel}' + \vec{v}_{i\perp}', \quad \vec{v}_{i\parallel}' = \dot{r}_i' \vec{e}_i, \quad \vec{v}_{i\perp}' = r_i' \dot{\varphi}_i \vec{n}_i = [\vec{\omega}_i, \vec{r}_i'], \\ \dot{\vec{v}}_i' = (\ddot{r}_i' - r_i' \dot{\varphi}_i^2)\vec{e}_i + (2\dot{r}_i' \dot{\varphi}_i + r_i' \ddot{\varphi}_i)\vec{n}_i. \end{gathered} \tag{91}$$

Здесь

$$\vec{e}_i = (\cos\varphi_i, \sin\varphi_i) \equiv \vec{e}_i(\varphi_i), \quad \vec{n}_i = \dot{\vec{e}}_i / \dot{\varphi}_i = (-\sin\varphi_i, \cos\varphi_i) \equiv \vec{n}_i(\varphi_i), \quad \vec{\vec{m}}_i = [\vec{e}_i, \vec{n}_i], \quad \vec{\omega}_i = \dot{\varphi}_i \vec{\vec{m}}_i, \tag{92}$$

где $\vec{e}_i$ — орт радиуса-вектора $\vec{r}_i'$, векторы $\vec{e}_i, \vec{n}_i$ и $\vec{\vec{m}}_i$ образуют базисную правовинтовую тройку взаимно перпендикулярных ортов, причем вектор $\vec{\vec{m}}_i$ перпендикулярен к плоскости P. С помощью соотношений (91) векторы момента импульса и момента силы, $\vec{L}_i' = [\vec{r}_i', \vec{p}_i']$ и $\vec{M}_i' = [\vec{r}_i', \vec{F}_i']$, можно преобразовать к следующей форме (ср. с (49)):

$$\vec{L}_i' = L_i' \vec{\vec{m}}_i, \quad \vec{M}_i' = M_i' \vec{\vec{m}}_i, \quad L_i' = m_i r_i'^2 \dot{\varphi}_i, \quad M_i' = m_i r_i'(2\dot{r}_i' \dot{\varphi}_i + r_i' \ddot{\varphi}_i), \quad \dot{L}_i' = M_i'. \tag{93}$$

Элементарная работа dA_i, совершаемая силой $\vec{F}_i'$ над частицей i при ее перемещении, и составляющая этой работы $dA_{i\perp}$, отвечающая вращательному движению, даются формулами:

$$dA_i = \vec{F}_i' d\vec{r}_i' = dK_i', \quad dA_{i\perp} = \vec{F}_i' \vec{v}_{i\perp}' dt = \vec{F}_i' [\vec{\omega}_i, \vec{r}_i']\, dt = \vec{\omega}_i \vec{M}_i'\, dt\,, \tag{94}$$

где $K_i' = \dfrac{m_i \vec{v}_i'^2}{2}$ — кинетическая энергия частицы i.

Согласно соотношениям (42), рассматриваемая система частиц движется по инерции, если кинетическая энергия и момент импульса каждой частицы сохраняются:

$$K_i' = \frac{m_i}{2}\left[(\dot{r}_i')^2 + (r_i' \dot{\varphi}_i)^2\right] = const, \quad \vec{L}_i' = m_i r_i'^2 \dot{\vec{\varphi}}_i = const, \tag{95}$$

$i=1,2,3.$

Ввиду соотношений связи (89), лишь два из уравнений движения (88) являются независимыми. Так, если в качестве независимых взять уравнения $\frac{d\vec{p}_1'}{dt}=\vec{F}_1'$ и $\frac{d\vec{p}_2'}{dt}=\vec{F}_2'$, то складывая эти уравнения почленно и используя условия связи (89), приходим к уравнению движения третьей частицы: $\frac{d\vec{p}_3'}{dt}=\vec{F}_3'$. Принимая во внимание указанную выше особенность движения по инерции трехчастичной системы, в дальнейшем независимыми будем считать частицы $i=1$ и $i=2$ и условия (95) движения по инерции для третьей частицы ($i=3$) выразим через физические параметры, относящиеся к остальным частицам. Из условий связи (86) и (89) выразим $\vec{r}_3'$ и $\vec{p}_3'$:

$$\vec{r}_3'=-\frac{1}{m_3}\left(m_1\vec{r}_1'+m_2\vec{r}_2'\right), \quad \vec{p}_3'=-\left(\vec{p}_1'+\vec{p}_2'\right). \tag{96}$$

С помощью (96) нетрудно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} K_3' &= \frac{1}{2m_3}\left(\vec{p}_1'+\vec{p}_2'\right)^2=\frac{1}{m_3}\left(m_1K_1'+m_2K_2'\right)+\frac{m_1m_2}{m_3}\vec{v}_1'\vec{v}_2', \\ \vec{L}_3' &= [\vec{r}_3',\vec{p}_3']=\frac{1}{m_3}\left(m_1\vec{L}_1'+m_2\vec{L}_2'\right)+\frac{m_1m_2}{m_3}\left([\vec{r}_1',\vec{v}_2']+[\vec{r}_2',\vec{v}_1']\right). \end{aligned} \tag{97}$$

Поскольку величины K_i' и $\vec{L}_i'$ при $i=1,2$ являются интегралами движения по инерции, то из (97) видно, что величины K_3' и $\vec{L}_3'$ будут интегралами движения при выполнении условий:

$$\vec{v}_1'\vec{v}_2'=const, \quad [\vec{r}_1',\vec{v}_2']+[\vec{r}_2',\vec{v}_1']\equiv\vec{A}=const. \tag{98}$$

Для начала рассмотрим случай, когда частицы $i=1,2$ движутся по инерции поступательно. В этом случае, очевидно, первое из равенств (98) выполняется автоматически, а при рассмотрении второго равенства (98) возникают три возможности.

1). Если $\vec{L}_i'=0$ ($i=1,2$), то в силу (91) и (93)

$$\varphi_i=0, \quad \vec{v}_i'=v_{i0}'\vec{e}_i, \quad \vec{r}_i'=\left(v_{i0}'(t-t_0)+r_{i0}'\right)\vec{e}_i,$$

где $v_{i0}'=const, r_{i0}'=const$. Поэтому

$$\vec{A}=\left(r_{10}'v_{20}'-r_{20}'v_{10}'\right)[\vec{e}_1\vec{e}_2]=const.$$

2). Если $\vec{L}_1'=0,\ \vec{L}_2'\neq 0$, то $\varphi_1=0,\ \varphi_2\neq 0$. Тогда

$$\vec{v}_1'=v_{10}'\vec{e}_1, \quad \vec{r}_1'=\left(v_{10}'(t-t_0)+r_{10}'\right)\vec{e}_1$$

и, в силу (63)-(66),

$$\vec{r}_2'=\vec{v}_2'(t-t_0)+\vec{r}_{20}', \ \vec{v}_2'=v_{20}'\vec{n}_{20}, \ \vec{r}_{20}'=r_{20}'\vec{e}_{20}, \ \vec{e}_{20}=\vec{e}_2(\varphi_{20}), \ \vec{n}_{20}=\vec{n}_2(\varphi_{20}),$$

где r_{20}', v_{20}' — постоянные, $\varphi_{20}=\varphi_2|_{t=t_0}$. Отсюда

$$\vec{A}=r_{10}'v_{20}'[\vec{e}_1,\vec{n}_{20}]+r_{20}'v_{10}'[\vec{e}_{20},\vec{e}_1]=const.$$

3). Если $\vec{L}_1'\neq 0,\ \vec{L}_2'\neq 0$, то вычисления проводятся аналогично предыдущим и дают: $\vec{A}=const$.

На основании приведенных вычислений и соотношений (97) заключаем, что третья частица также движется по инерции поступательно, причем величина $\vec{L}_3'$ может быть отличной от нуля.

Обратимся теперь к вращательному движению по инерции. Предполагаем, что частицы $i=1,2$ вращаются по окружностям радиуса $r_i'=\frac{L_i'}{m_iv_i'}=\frac{v_i'}{\omega_i}$ с угловой скоростью $\omega_i=\frac{L_i'}{m_i(r_i')^2}$ и линейной скоростью $v_i'=\omega_ir_i'$ (r_i' и ω_i — постоянные), и вычисляем параметры, описывающие движение третьей частицы. Принимая во внимание равенства

$$\vec{r}_i' = r_i'\vec{e}_i, \quad \vec{v}_i' = r_i'\omega_i\vec{n}_i, \quad \varphi_i = \omega_i(t - t_0) + \varphi_{i0}, \quad \varphi_{i0} = const, \tag{99}$$

где векторы $\vec{e}_i$ и $\vec{n}_i$ определены формулами (92), и соотношения (96), получаем:

$$\vec{r}_3' = -\frac{1}{m_3}\ m_1r_1'\vec{e}_1 + m_2r_2'\vec{e}_2\ , \quad \vec{p}_3' = -\ m_1r_1'\omega_1\vec{n}_1 + m_2r_2'\omega_2\vec{n}_2\ . \tag{100}$$

С помощью (99) и (100) нетрудно вывести следующие соотношения:

$$\begin{aligned} K_3' &= \frac{1}{2m_3}\Big[(m_1r_1'\omega_1)^2 + (m_2r_2'\omega_2)^2 + 2m_1r_1'\omega_1 m_2r_2'\omega_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\Big], \\ \vec{L}_3' &= \frac{1}{m_3}\Big[(m_1r_1')^2\omega_1 + (m_2r_2')^2\omega_2 + m_1r_1'm_2r_2'(\omega_1 + \omega_2)\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\Big]\vec{\tilde{m}}, \end{aligned} \tag{101}$$

где $\vec{\tilde{m}} = \vec{\tilde{m}}_1 = \vec{\tilde{m}}_2$, $\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)(t - t_0) + \varphi_{20} - \varphi_{10}$. Как видно из (101), величины K_3' и $\vec{L}_3'$ являются интегралами движения лишь при $\omega_2 = \omega_1 \equiv \omega$. Отсюда следует важный вывод: в состоянии вращательной инерции все три частицы вращаются с одной и той же угловой скоростью ($\omega_i = \omega$ при $i = 1,2,3$).

Умножая обе части первого из равенств (100) скалярно на $\vec{e}_3$ и преобразуя полученное соотношение с помощью (92), а также возводя обе части этого же равенства в квадрат, получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} r_3' &= -\frac{1}{m_3}\ m_1r_1'\cos\varphi_{10}' + m_2r_2'\cos\varphi_{20}'\ , \\ (r_3')^2 &= \frac{1}{m_3^2}\Big[(m_1r_1')^2 + (m_2r_2')^2 + 2m_1r_1'm_2r_2'\cos(\varphi_{20}' - \varphi_{10}')\Big], \end{aligned} \tag{102}$$

где $\varphi_{i0}' = \varphi_{i0} - \varphi_{30}$, $i = 1,2$. Из условия совместимости соотношений (102) следует равенство

$$m_1r_1'\sin\varphi_{10}' + m_2r_2'\sin\varphi_{20}' = 0, \tag{103}$$

которое можно получить и другим способом — умножая обе части первого из равенств (100) скалярно на $\vec{n}_3$. Далее, из (100) с помощью (90) –(92) выводим следующие формулы:

$$\begin{aligned} r_3'\cos\varphi_{30} &= -\frac{1}{m_3}\ m_1r_1'\cos\varphi_{10} + m_2r_2'\cos\varphi_{20}\ , \\ r_3'\sin\varphi_{30} &= -\frac{1}{m_3}\ m_1r_1'\sin\varphi_{10} + m_2r_2'\sin\varphi_{20}\ , \quad tg\varphi_{30} = \frac{m_1r_1'\sin\varphi_{10} + m_2r_2'\sin\varphi_{20}}{m_1r_1'\cos\varphi_{10} + m_2r_2'\cos\varphi_{20}}. \end{aligned} \tag{104}$$

Рассмотрим частный случай

$$m_3 >> m_2 >> m_1. \tag{105}$$

Очевидно, что в силу первого из условий (88)

$$r_3' << r_1', r_2'. \tag{106}$$

Будем также полагать, что выполняются условия

$$r_2' \cong r_1', \quad |\vec{r}_2' - \vec{r}_1'| << r_1', r_2'. \tag{107}$$

Так как по определению $r_i' > 0$, $i = 1,2,3$, то из (102)-(107) видно, что можно положить:

$$|\varphi_{10}|, |\varphi_{20}| << \pi, \quad \varphi_{30} = \pi + \varepsilon, \quad |\varepsilon| << \pi\ . \tag{108}$$

Поскольку $\varphi_{i0}' = \varphi_{i0} - \varepsilon - \pi$, $i = 1,2$, то равенства (103) и (104) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} &m_1r_1'\sin(\varphi_{10} - \varepsilon) + m_2r_2'\sin(\varphi_{20} - \varepsilon) = 0, \\ &r_3'\cos\varepsilon = \frac{1}{m_3}\ m_1r_1'\cos\varphi_{10} + m_2r_2'\cos\varphi_{20}\ , \\ &r_3'\sin\varepsilon = \frac{1}{m_3}\ m_1r_1'\sin\varphi_{10} + m_2r_2'\sin\varphi_{20}\ , \quad tg\varepsilon = \frac{m_1r_1'\sin\varphi_{10} + m_2r_2'\sin\varphi_{20}}{m_1r_1'\cos\varphi_{10} + m_2r_2'\cos\varphi_{20}} \equiv a. \end{aligned} \tag{109}$$

Из неравенств (108) и первого из соотношений (109) видно, что

$$|\varphi_{20}-\varepsilon| \approx \frac{m_1 r_1'}{m_2 r_2'}|\varphi_{10}-\varepsilon| << |\varphi_{10}-\varepsilon|,$$

причем выполняются либо неравенства $\varphi_{20} > \varepsilon > \varphi_{10} > 0$ либо неравенства $\varphi_{10} > \varepsilon > \varphi_{20} > 0$.

Таким образом, все параметры, определяющие движение третьей частицы рассматриваемой системы, выражены через параметры, относящиеся к частицам 1 и 2. Приведем формулы для ε и r_3':

$$\varepsilon = a - \frac{a^3}{3} + \ldots, \quad r_3' = \frac{m_2}{m_3} r_2' \left(\cos\varphi_{20} + \frac{m_1 r_1'}{m_2 r_2'} \cos\varphi_{10} \right) \sqrt{1+a^2} = \frac{m_2}{m_3} r_2' \left[1 + 2\frac{m_1 r_1'}{m_2 r_2'} \cos(\varphi_{20}-\varphi_{10}) + \left(\frac{m_1 r_1'}{m_2 r_2'} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Выше рассмотрено такое состояние движения трехчастичной системы по инерции, в котором частицы 1 и 2 вращаются вокруг частицы 3. Согласно полученным результатам, все три частицы движутся по концентрическим окружностям, центр которых совпадает с центром масс, а радиусы составляют r_1', r_2', r_3' (при $r_1' \cong r_2' >> r_3'$).

7. Вращательная инерция трехчастичной системы, моделирующей движение Солнца, Земли и Луны

В предыдущем разделе исследовано вращательное движение по инерции, совершаемое независимо друг от друга частицами 1 и 2 вокруг частицы 3. Теперь обратимся к движению по инерции качественно другого типа, движению, в котором частицы 1 и 2 вращаются по инерции друг относительно друга и, одновременно, совершают вращательное движение по инерции вокруг частицы 3.

Решение этой задачи проведем в 4 этапа:

1. выделив подсистему, состоящую из частиц 1 и 2 (назовем ее подсистемой A), рассмотрим ее вращательное движение по инерции;

2. из системы уравнений, описывающих трехчастичную систему, выделим уравнения, определяющие движение вспомогательной подсистемы (назовем ее подсистемой B) — фиктивной частицы, соответствующей центру масс подсистемы A, и частицы 3;

3. рассмотрим вращательное движение по инерции подсистемы B;

4. проведем анализ результирующего движения по инерции исходной трехчастичной системы.

Этап 1

Введем центр масс C_1 подсистемы A, радиус-вектор которого дается формулой

$$\vec{R}_{C_1} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M_*}, \quad M_* = m_1 + m_2, \tag{110}$$

и подчиняется уравнению

$$M_*\ddot{\vec{R}}_{C_1} = -\vec{F}_3. \tag{111}$$

При выводе уравнения (111) использовано условие замкнутости исходной системы частиц: $\sum_{i=1,2,3} \vec{F}_i = 0$. Перейдем в новую систему отсчета K'', начало координат которой совпадает с центром масс C_1, а координатные оси параллельны осям координат системы отсчета K. Радиусы-векторы частиц в K, $\vec{r}_i$, связаны с радиусами-векторами в K'', $\vec{r}_i''$, равенствами

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{C_1} + \vec{r}_i'', \quad i = 1,2,3. \tag{112}$$

С помощью преобразований (112) исходная система уравнений движения $\dfrac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$ ($i = 1,2,3$) преобразуется к виду:

$$\frac{d\vec{p}_i''}{dt} = \vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{R}}_{C_1} \equiv \vec{F}_i'', \quad \vec{p}_i'' = m_i\dot{\vec{r}}_i'' = \vec{p}_i - m_i\dot{\vec{R}}_{C_1}. \tag{113}$$

Из (110) и (112) вытекают следующие равенства:

$$\vec{r}_1'' = \vec{r}_1 - \vec{R}_{C_1} = \frac{\mu}{m_1}\vec{R}, \quad \vec{r}_2'' = \vec{r}_2 - \vec{R}_{C_1} = -\frac{\mu}{m_2}\vec{R}, \tag{114}$$

где $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1'' - \vec{r}_2''$, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Из (114) видно, что $m_1\vec{r}_1'' + m_2\vec{r}_2'' = 0.$ Поэтому радиус-вектор центра масс подсистемы A в системе отсчета K'', $\vec{R}_{C_1}''$, обращается в нуль, как и должно быть, так как система отсчета K'' выбрана так, что начало отсчета ее координат совпадает с центром масс C_1.

Используя (113) и (114), вычисляем силы, импульсы и их моменты:

$$\begin{aligned}
&\vec{F}_1'' = \mu\ddot{\vec{R}}, \quad \vec{F}_2'' = -\mu\ddot{\vec{R}}, \quad \vec{F}_3'' = m_3\ddot{\vec{r}}_3'' = \left(1 + \frac{m_3}{M_*}\right)\vec{F}_3, \\
&\vec{p}_1'' = \mu\dot{\vec{R}}, \quad \vec{p}_2'' = -\mu\dot{\vec{R}}, \quad \vec{p}_3'' = m_3\dot{\vec{r}}_3'', \\
&\vec{L}_i'' = [\vec{r}_i'', \vec{p}_i''], \quad \vec{M}_i'' = [\vec{r}_i'', \vec{F}_i''], \quad i = 1,2,3; \\
&\vec{L}_i'' = \frac{\mu^2}{m_i}[\vec{R}, \dot{\vec{R}}], \quad \vec{M}_i'' = \frac{\mu^2}{m_i}[\vec{R}, \ddot{\vec{R}}], \quad i = 1,2; \quad \vec{L}_3'' = [\vec{r}_3'', \dot{\vec{r}}_3''], \quad \vec{M}_3'' = [\vec{r}_3'', \ddot{\vec{r}}_3''].
\end{aligned} \tag{115}$$

Согласно (115), результирующие моменты подсистемы A выражаются формулами

$$\vec{L}_1'' + \vec{L}_2'' = \mu[\vec{R}, \dot{\vec{R}}] \equiv \vec{L}, \quad \vec{M}_1'' + \vec{M}_2'' = \mu[\vec{R}, \ddot{\vec{R}}] \equiv \vec{M} \tag{116}$$

и подчиняются уравнению моментов $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$.

Вычисляем работу, совершаемую при перемещении частиц 1 и 2 (см. (51), (52)):

$$dA = dA_1 + dA_2, \quad dA_i = \vec{F}_i'' d\vec{r}_i'' = \frac{\mu^2}{m_i}\ddot{\vec{R}}\dot{\vec{R}}dt, \quad i = 1,2, \quad dA = dK, \quad K = \frac{\mu\dot{\vec{R}}^2}{2}. \tag{117}$$

Здесь K — кинетическая энергия подсистемы A. Компонента работы, отвечающая вращательному движению, дается формулами

$$dA_\perp = dA_{1\perp} + dA_{2\perp}, \quad dA_{i\perp} = \vec{F}_i'' d\vec{r}_{i\perp}'', \quad i = 1,2, \tag{117a}$$

где $d\vec{r}_{i\perp}''$ - перемещение частицы i при вращательном движении.

Дальнейшие вычисления удобно провести, используя полярные координаты вектора $\vec{R}$, $\vec{R} = (R, \varphi_R)$, обозначения $\vec{R} = R\vec{e}_R$, $\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \vec{V}_\parallel + \vec{V}_\perp$ и соотношения (49)-(51). Вводя угловую скорость $\varpi = \varphi_R \vec{\tilde{m}}_R$, где вектор $\vec{\tilde{m}}_R$ определен равенствами (50), и обозначения $\varpi_1 = \dfrac{\mu}{m_1}\varpi$, $\varpi_2 = -\dfrac{\mu}{m_2}\varpi$, перемещение $d\vec{r}_{i\perp}''$ можно записать в виде: $d\vec{r}_{i\perp}'' = [\varpi_i \vec{R}]dt$ (см. (51),(52)).

Окончательное выражение для работы $dA_\perp$ имеет вид:

$$dA_\perp = \vec{M}\varpi dt. \tag{118}$$

В силу (117) и (118), условия вращательного движения подсистемы A по инерции, $dA = 0$ и $dA_\perp = 0$, можно записать в виде, аналогичном (54):

$$K = \frac{\mu}{2}(\dot{R}^2 + R^2\varphi_R^2) \equiv \frac{\mu}{2}V_0^2 = const, \quad \vec{L} = \mu R^2 \varphi_R \vec{\tilde{m}}_R = L\vec{\tilde{m}}_R = const. \tag{119}$$

Здесь $V_0 = const$. При выводе формулы для $\vec{L}$ (119) использованы равенства (116) и (49). Выражения (119) полностью описывают вращательное движение по инерции подсистемы A.

Этап 2

Анализ, выполненный на предыдущем этапе, показывает, что вращательное движение по инерции частиц 1 и 2 зависит только от радиуса-вектора $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, описывающего относительное движение частиц, и его производных по времени $\dot{\vec{R}}$ и $\ddot{\vec{R}}$. Остается определить движение, описываемое радиусами-векторами $\vec{R}_{C_1}$ и $\vec{r}_3$. Задача сводится, таким образом, к рассмотрению движения по инерции двух частиц — фиктивной частицы с массой $M_* = m_1 + m_2$ и радиусом-вектором $\vec{R}_{C_1}$, движение которой описывается в системе отсчета K уравнением (111), и частицы 3, подчиняющейся уравнению движения $\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_3$. Вращательное движение по инерции этой системы (подсистемы B) можно рассмотреть аналогично тому, как это было сделано на этапе 1 с подсистемой A.

Этап 3

Определим центр масс C_2 подсистемы B. Его радиус-вектор дается формулой

$$\vec{R}_{C_2} = \frac{M_*\vec{R}_{C_1} + m_3\vec{r}_3}{M_* + m_3}.$$

Очевидно, что

$$\vec{R}_{C_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \equiv \vec{R}_C, \tag{120}$$

где $\vec{R}_C$ — радиус-вектор центра масс C исходной системы трех частиц. Значит, центры масс подсистемы B и исходной рассматриваемой нами системы совпадают: $C_2 = C$.

Удобно ввести обозначения: $\vec{R}_{C_1} = \vec{r}$ и $M_*\dot{\vec{r}} = \vec{p}$ — радиус-вектор и вектор импульса фиктивной частицы с массой M_*. Движение подсистемы B описывается уравнениями

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{F}_3, \quad \frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_3. \tag{121}$$

Перейдем к системе отсчета K', начало координат которой совпадает с центром масс C, а координатные оси параллельны осям координат системы отсчета K. Радиусы-векторы частиц в K', $\vec{r}\,', \vec{r}_3\,'$, связаны с радиусами-векторами $\vec{r}, \vec{r}_3$ равенствами

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}_C = \frac{\mu_*}{M_*}\vec{R}_*, \quad \vec{r}_3\,' = \vec{r}_3 - \vec{R}_C = -\frac{\mu_*}{m_3}\vec{R}_*, \tag{122}$$

где $\mu_* = \frac{M_* m_3}{M_* + m_3}$, $\vec{R}_* = \vec{r} - \vec{r}_3$. Из (120) и (121) следует, что $\ddot{\vec{R}}_C = 0$. Значит, в силу (122), выполняются соотношения:

$$\frac{d\vec{p}\,'}{dt} = \mu_*\ddot{\vec{R}}_* \equiv \vec{F}\,', \quad \frac{d\vec{p}_3\,'}{dt} = -\mu_*\ddot{\vec{R}}_* \equiv \vec{F}_3\,', \tag{123}$$

где $\vec{p}\,' = M_*\dot{\vec{r}}\,' = \mu_*\dot{\vec{R}}_*$, $\vec{p}_3\,' = m_3\dot{\vec{r}}_3\,' = -\mu_*\dot{\vec{R}}_*$, $\vec{F}\,' + \vec{F}_3\,' = 0$.

Далее вычисляем моменты импульсов и сил:

$$\vec{L}\,' = [\vec{r}\,', \vec{p}\,'] = \frac{\mu_*^2}{M_*}[\vec{R}_*, \dot{\vec{R}}_*], \quad \vec{L}_3\,' = [\vec{r}_3\,', \vec{p}_3\,'] = \frac{\mu_*^2}{m_3}[\vec{R}_*, \dot{\vec{R}}_*], \quad \vec{L}\,' + \vec{L}_3\,' \equiv \vec{\tilde{L}} = \mu_*[\vec{R}_*, \dot{\vec{R}}_*],$$

$$\vec{M}\,' = [\vec{r}\,', \vec{F}\,'], \quad \vec{M}_3\,' = [\vec{r}_3\,', \vec{F}_3\,'], \quad \vec{M}\,' + \vec{M}_3\,' = \vec{\tilde{M}} = \mu_*[\vec{R}_*, \ddot{\vec{R}}_*], \quad \frac{d\vec{\tilde{L}}}{dt} = \vec{\tilde{M}}.$$

Работу $d\tilde{A}$, совершаемую при перемещении частиц подсистемы B, и составляющую работы $d\tilde{A}_\perp$, соответствующую вращательному движению, определяем по формулам, аналогичным (117) и (117а):

$$d\tilde{A} = \vec{F}\,'d\vec{r}\,' + \vec{F}_3\,'d\vec{r}_3\,', \quad d\tilde{A}_\perp = \vec{F}\,'d\vec{r}_\perp\,' + \vec{F}_3\,'d\vec{r}_{3\perp}\,'.$$

При вычислениях используем полярные координаты вектора $\vec{R}_*$, $\vec{R}_* = (R_*, \varphi_{R_*})$ и представление

$$\vec{R}_* = R_*\vec{e}_{R_*},\ \vec{e}_{R_*} = (\cos\varphi_{R_*}, \sin\varphi_{R_*}),\quad \vec{n}_{R_*} = \dot{\vec{e}}_{R_*}/\varphi_{R_*} = (-\sin\varphi_{R_*}, \cos\varphi_{R_*}),\quad \vec{\tilde{m}}_{R_*} \equiv [\vec{e}_{R_*}\vec{n}_{R_*}], \qquad (124)$$

где $\vec{e}_{R_*}$ — орт вектора $\vec{R}_*$. Опуская выкладки, аналогичные тем, которые проводились на этапе 1, приведем окончательный результат:

$$d\tilde{A} = d\tilde{K},\quad d\tilde{A}_\perp = \vec{\tilde{M}}\vec{\tilde{\omega}}dt,$$

где

$$\tilde{K} = \frac{\mu_*}{2}(\dot{R}_*^2 + R_*^2\varphi_{R_*}^2),\quad \vec{\tilde{\omega}} = \varphi_{R_*}\vec{\tilde{m}}_{R_*},$$

$\tilde{K}$ — кинетическая энергия частиц подсистемы B.

Условия того, что подсистема B совершает вращательное движение по инерции, выражаются равенствами $\tilde{K} = const,\ \vec{\tilde{M}} = 0$, которые можно представить в виде (см. (119)):

$$\tilde{K} = \frac{\mu_*}{2}(\dot{R}_*^2 + R_*^2\varphi_{R_*}^2) \equiv \frac{\mu_*}{2}\tilde{V}_0^2 = const,\quad \vec{\tilde{L}} = \mu_* R_*^2\varphi_{R_*}\vec{\tilde{m}}_{R_*} = \tilde{L}\vec{\tilde{m}}_{R_*} = const, \qquad (125)$$

где $\tilde{V}_0 = const.$ Выражения (125) полностью описывают вращательную инерцию подсистемы B.

Этап 4

Из условий (119) вращательной инерции подсистемы A и на основании результатов раздела 4 заключаем, что частицы 1 и 2 движутся по концентрическим окружностям Γ_1 и Γ_2 (см. рис.4) с центром в точке C_1 с угловой скоростью $\omega = \dfrac{L}{\mu R_0^2}$; радиусы окружностей составляют $\dfrac{\mu}{m_1}R_0 \equiv R_1$ и $\dfrac{\mu}{m_2}R_0 \equiv R_2$, где $R_0 = \dfrac{|\vec{L}|}{\mu V_0}$, $V_0 = R_0|\omega|$. Расстояние между частицами 1 и 2, R_{12}, не изменяется со временем: $R_{12} = R_0$.

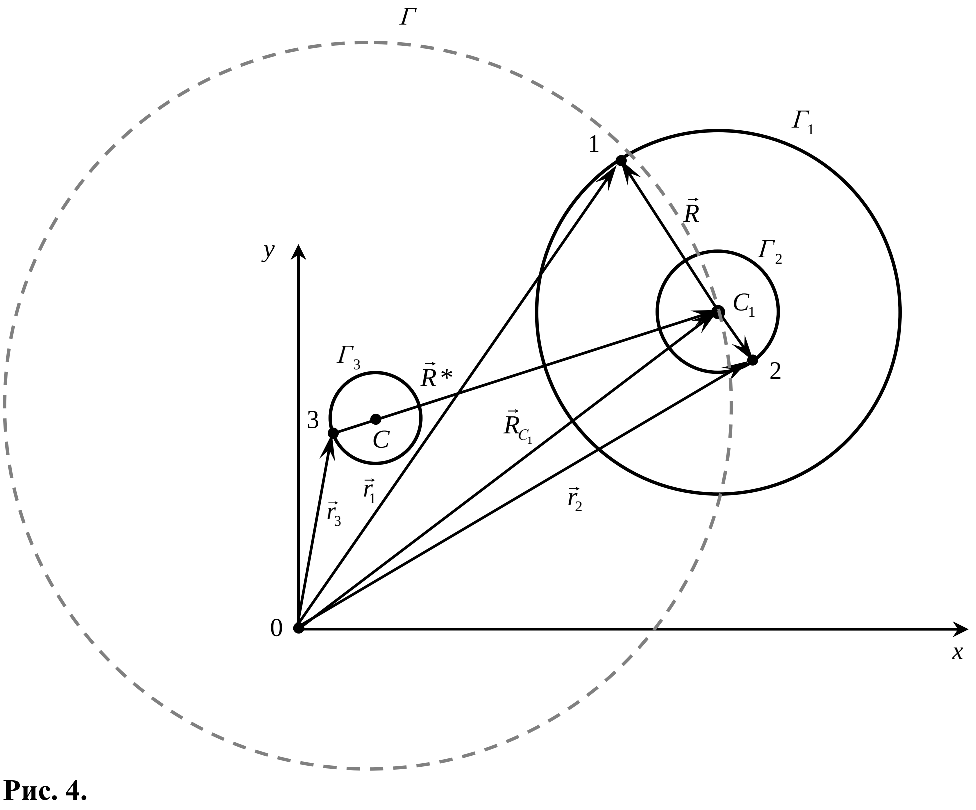


Рис. 4.

Окружности Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ изображают траектории движения частиц 1, 2, 3 и центра масс C_1 частиц 1 и 2, C — центр масс системы частиц 1, 2 и 3 (считается, что $m_3 > m_2 > m_1$).

Аналогично из условий (125) вращательного движения по инерции подсистемы B следует, что частица 3 и центр масс подсистемы A (точка C_1) движутся по концентрическим окружностям Γ_3 и Γ (см. рис. 4) с центром в точке C с угловой скоростью $\omega_* = \dfrac{\tilde{L}}{\mu_* R_{*0}^2}$ и радиусами $\dfrac{\mu_*}{m_3} R_{*0} \equiv R_3$ и $\dfrac{\mu_*}{M_*} R_{*0}$, где $R_{*0} = \dfrac{|\vec{\tilde{L}}|}{\mu_* \tilde{V}_0}$, $\tilde{V}_0 = R_{*0} |\omega_*|$. Расстояния между частицами 3 и 2 и частицами 3 и 1, R_{32} и R_{31}, составляют: $R_{32} = |\vec{R}_* - \dfrac{\mu}{m_2}\vec{R}|$, $R_{31} = |\vec{R}_* + \dfrac{\mu}{m_1}\vec{R}|$ при $R_* = R_{*0}$, $R = R_0$. Из этих соотношений и равенства $\vec{R}_*\vec{R} = R_{*0}R_0 \cos\varphi(t)$, где $\varphi(t) = (\omega - \omega_*)t + \varphi_0$, $\varphi_0 = const$, видно, что величины R_{32} и R_{31} изменяются со временем с частотой $\omega - \omega_*$. Если выполняются условия $m_3 >> m_2 >> m_1$ и $R_{*0} >> R_0$, то

$$R_{32} \approx R_{*0}\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\frac{R_0}{R_{*0}}\cos\varphi(t)\right).$$

Амплитуда осцилляций расстояния R_{32} составляет $\dfrac{m_1}{m_2} R_0 \equiv \Delta$.

Отметим, что в системе центра масс всей трехчастичной системы (точка C), на небольшом участке окружности Γ (небольшом по сравнению с радиусом окружности), траектории результирующего движения частиц 1 и 2 представляют собой трохоиду (см. рис. 1 и 2).

Если рассматриваемая система трех частиц моделирует Солнце, Землю и Луну, то $R_{*0} = 150 \cdot 10^6\, км$, $R_0 = 0{,}38 \cdot 10^6\, км$, $\dfrac{m_1}{m_2} = 1{,}23 \cdot 10^{-2}$, $\dfrac{m_2}{m_3} = 3 \cdot 10^{-6}$. Приведем численные оценки: $R_2 = 4{,}6 \cdot 10^6\, м$, $R_3 = 4{,}5 \cdot 10^5\, м$, $\Delta = 4{,}6 \cdot 10^6\, м$, $\dfrac{\Delta}{R_{*0}} = 0{,}31 \cdot 10^{-4}$. Для сравнения приведем также радиусы Земли и Солнца: $6{,}37 \cdot 10^6\, м$ и $6{,}95 \cdot 10^8\, м$. Отметим, что одновременно достигаются $\min R_{32}$ и $\max R_{31}$ (либо $\max R_{32}$ и $\min R_{31}$).

В заключение раздела представим окончательные формулы для сил, действующих на частицы в системе отсчета K (см. (111), (113), (115) и (122)):

$$\vec{F}_1 = \mu \ddot{\vec{R}} + \frac{m_1 \mu_*}{M_*}\ddot{\vec{R}}_*, \quad \vec{F}_2 = -\mu \ddot{\vec{R}} + \frac{m_2 \mu_*}{M_*}\ddot{\vec{R}}_*, \quad \vec{F}_3 = -\mu_* \ddot{\vec{R}}_*.$$

8. Заключение. Новый подход к проблеме движения

Как подчеркивают А. Эйнштейн и Л. Инфельд [16], «самая фундаментальная проблема, оставшаяся в течение тысячи лет нерешенной из-за ее сложности, — это проблема движения».

По утверждению И. Ньютона, «вся трудность физики ... состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления».

Постановка задачи об исследовании движения в природе, содержащаяся в цитированном выше высказывании Ньютона, привела к «изобретению» не существующих в природе гравитационных сил, подчиняющихся закону всемирного тяготения, и ввела тем самым физиков в заблуждение, задержав развитие ряда областей физической науки более, чем на 300 лет! Источником ошибки в постановке задачи, принадлежащей Ньютону, является представление о том, что движение тела по инерции может быть только поступательным и потому вращение тела, как движение криволинейное, должно обязательно происходить под действием вынуждающей силы, т. е. должно быть динамическим эффектом. В действительности же вращательная инерция — это чисто кинематический эффект, как это видно из полученных нами результатов: уравнения движения классической механики мы используем лишь для нахождения условий движения по инерции и из полученных условий определяем силы, действующие на частицы при вращательной инерции.

Основное содержание настоящей работы состоит в следующем.

На основе классической механики **доказано существование особого вида движения частиц — вращательного движения по инерции,** которое является обобщением поступательной инерции на случай движения по криволинейной траектории. Тем самым **открыт качественно новый тип движения — вращательная инерция, которая, в свою очередь, обобщается, путем ее объединения с поступательной инерцией, и приводит к понятию вращательно-поступательной инерции**.

Анализ **вращательного движения по инерции** показывает, что в двухчастичной системе вращательная инерция порождает силу притяжения между частицами, которая, в частном случае, численно совпадает с силой, постулируемой законом всемирного тяготения. Тем самым **тяготение** предстает перед нами **как следствие вращательной инерции**. **Истинной причиной тяготения является**, таким образом, **не гравитационное поле, внутренне присущее материальным телам по самой природе вещей, а вращательная инерция.** Представление о существовании силы гравитационного притяжения между двумя покоящимися телами — не более, чем иллюзия. **Сила притяжения не порождается телами, а возникает в результате вращательной инерции.**

Полученные результаты наводят на мысль о том, что такие проблемы, как принцип эквивалентности, гравитационные волны, гравитоны, черные дыры и многие другие, которые тщательно изучались на протяжении всего XX века на основе общей теории относительности (ОТО), не являются физически актуальными как не относящиеся к физической реальности и не отражающие физическую сущность явления гравитации. То же самое касается и проблем скрытой массы и темной энергии, которые активно обсуждаются в литературе в последние годы в рамках ОТО.

Осознание того, что в природе существует качественно новый вид движения частиц - вращательная инерция и что она является истинной причиной гравитации, **открывает принципиально новые пути развития науки и техники.** Мы имеем в виду, в частности, то обстоятельство, что **вращательная и вращательно-поступательная инерции представляют собой виды безопорного движения.** Как отмечает В. А. Меньшиков [8,17], видный исследователь в области космической прикладной механики и специалист по разработке и применению космической техники, в настоящее время традиционные технические решения, лежащие в основе существующих ныне двигательных установок, во многом исчерпали свои потенциальные возможности, и дальнейший существенный прогресс в этой области возможен лишь на пути «создания двигателей без выброса реактивной массы». Однако исследования в этом направлении тормозятся из-за отсутствия надежного теоретического обоснования явления безопорного движения. «Поскольку в основе двигательных систем без выброса реактивной массы лежит взаимодействие гравитационных полей, то есть возможность изменения их параметров и **открываются широчайшие перспективы по использованию созданных на этих принципах различных устройств**» ([8],с.315). Представленная в данной работе теория вращательной инерции — обоснование возможности безопорного движения, благодаря которому возникают невиданные горизонты для исследователей, работающих над созданием двигателей с безопорной тягой.

Авторы благодарят Ю. Д. Арепьева за интерес к теме и подбор литературы, стимулирующие дискуссии и сотрудничество, а также Р. Л. Кожухаря за помощь при оформлении работы.

Литература:

1. *Олейник В. П.* Новые результаты в определении сущности принципа относительности. Об одном заблуждении XX века. // Труды Конгресса-2006 «Фундаментальные проблемы естествознания и техники». — Санкт-Петербург: Изд-во «Осипов», 2006. — Ч. 1. — С. 277-297; Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2006. — №1. — С. 39-59.
2. *Олейник В. П.* Область действия теории относительности ограничена классической точечной частицей. О неэквивалентности инерциальных систем отсчета. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2006. — №2. — С. 20-42.
3. *Олейник В. П.* Новая интерпретация релятивистской физики. Об одном из глубочайших заблуждений XX века. // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2007. — Т. 7. — №4(28). — С. 32-64.
4. *Гришаев А. А.* http://newfiz.narod.ru.

5. *Головнев А.* Конечная Вселенная. Книга первая. Три тайны Вселенной: мироздание, жизнь, разум. — К.: Издательский Дом Д. Бураго, 2002.
6. *Головнев А.* Конечная Вселенная. Книга вторая. Физика конечной Вселенной. Альтернативная физическая концепция. — К.: Издательский Дом Д. Бураго, 2003.
7. *Пуанкаре А.* О науке. — М.: Наука,1983.
8. *Меньшиков В. А. и Дедков В. К.* Тайны тяготения. — М.: НИИ КС, 2007.
9. *Логунов А. А.* Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. — М.: Наука, 1987.
10. *Фридман А. А.* Мир как пространство и время. — М.: Наука, 1965.
11. *Лаврентьев М. М. и Еганова И. А.* Физические явления, предсказанные и обнаруженные Н. А. Козыревым, в свете адекватности пространства-времени физической реальности. // Философия науки. — 1997. — №1. — С.34-43.
12. *Олейник В. П.* Влияние коллективных возбуждений на характер квантовых процессов рассеяния во внешнем электромагнитном поле. // Квантовая электроника. — 1978. — Вып. 15. — С. 88-97.
13. *Олейник В. П. и Белоусов И. В.* Проблемы квантовой электродинамики вакуума, диспергирующих сред и сильных полей. — Кишинев: Штиинца, 1983.
14. *Терентьев М. В.* История эфира. — М.: ФАЗИС, 1999.
15. *Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
16. *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. — М.: Молодая гвардия, 1966.
17. *Меньшиков В. А. и др.* Движители без выброса реактивной массы: предпосылки и результаты. — М.: НИИ КС, 2003.

Статья поступила в редакцию 09.05.2008 г.

Oleinik V. P., Prokofjev V. P.

Rotary inertia and its physical consequences. What is gravitation?

Department of General and Theoretical Physics,
National Technical University of Ukraine «Kiev Polytechnic Institute»
37, Prospect Pobedy, Kiev, 03056, Ukraine
http://superluminalelectron.org/en*; e-mail:* valoleinik@gmail.com

According to the standard ideas of motion, in the nature there is the only kind of motion by inertia — uniform and rectilinear motion of the body which is not subject to external influence (**linear inertia**). In this paper **the concept of rotary motion by inertia**, which serves as a generalization of linear inertia to the case of motion of a body along a curvilinear trajectory, **is introduced**. It is shown that rotary inertia of system of two particles is accompanied by force influence on particles which is not, however, an external force action on particles. The case in point is a force which occurs due to spatial inhomogeneity of the system (existence of distinguished points, preferred directions, and so forth). Rotary motion by inertia is accompanied by occurrence of a field in the surrounding space, similar to the magnetic field induction; this field acts on particle with the force coincident in its form with the Lorentz force, in which the role of electric charge of the particle is played by its mass. Comparison of rotary motion by inertia of system of two particles with the motion of the particles interacting with each other according to the Newtonian law of gravitation is made. The character of motion of the system at hand in both approaches is shown to be identical. The quantities describing rotary motion by inertia coincide with the ones relating to the motion of a particle in potential force field, except for one quantity — the total energy of particles. For rotary inertia, the total energy of particles, as it should be, is positive, whereas the role of total energy, in describing the motion according to the law of gravitation, is played by the bound state energy of particle in a potential well, and this energy is negative. The distinction indicated above is a consequence of essentially different approaches to the description of motion of particles in the classical mechanics and in this paper. The main result of the paper is that the force of attraction between the particles making rotary motion by inertia is derived in it on the basis of kinematics; the force is shown to be numerically coincident with the one which is postulated by the Newtonian law of gravitation. **Thus, it is proved that gravitation, being a consequence of rotary motion by inertia, is not a special kind of interaction between material bodies**. **The gravitational field is not generated by material bodies**, **it arises as a result of the rotary motion of bodies by inertia. The hypothesis for the existence in the nature of gravitational forces, to which all elementary particles are subject and which are governed by the Newtonian law of gravitation**, **is erroneous.** Correctness of conclusions of the paper follows from the facts that 1) the evidences presented correspond to the physical level of rigor accepted in modern theoretical physics, 2) experimental data available in the literature [4] testify that gravitational attraction between bodies does not submit to the law of gravitation, and 3) results of the paper follow with necessity from the most general laws of motion and development of nature — the laws of dialectics [5, 6].

Keywords: physical nonequivalence of inertial reference frames, inherent inconsistency of special relativity, the problem of motion, linear inertia, rotary inertia, gravitation as a consequence of rotary inertia, incorrectness of the Newtonian law of gravitation, motion without ejection of jet engine fuel.