Специальная и общая теория относительности

УДК 524.830+530.12+538.8

Климец А. П.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

e-mail: aklimets@mail.ru

Рассмотрен вариант квантования общей теории относительности. Предложен принцип неопределенности для гравитационного поля.

Ключевые слова: общая теория относительности, квантовая гравитация, принцип неопределенности.

Основное уравнение общей теории относительности является нелинейным уравнением, существенно нелинейным, поэтому его квантовомеханическое решение вызывает серьезные затруднения. Предпринимались попытки проанализировать его в слабых гравитационных полях, когда справедлив принцип суперпозиции полей ([1], с.195). Однако в целом квантовая теория гравитации до сих пор еще не создана. Здесь мы рассмотрим не первоначальное уравнение Эйнштейна, а его преобразованный вариант. В этом случае формально оно упрощается, что дает возможность проанализировать его квантовомеханически. При этом обнаруживается выход в область планковских масштабов и энергий, что, видимо, указывает на верность избранного пути.

Основное уравнение Эйнштейна имеет вид

$$R_{ik} - 1/2\, g_{ik} R = (8\pi k/c^4)\, T_{ik} \qquad (1)$$

где k - гравитационная постоянная, c - скорость света

Уравнение (1) можно проинтегрировать по гиперповерхности S^k.

$$\int (-g)\,(R_{ik} - 1/2\, g_{ik} R)\, d S^k = (8\pi k/c^4) \int (-g)\, T_{ik}\, d S^k \qquad (2)$$

где g - определитель метрического тензора g_{ik}. Тогда правая часть в (2) принимает вид

$$(8\pi k/c^4) \int (-g)\, T_{ik}\, d S^k = (4\pi\, 2k/c^3)\, P_i \qquad (3)$$

где P_i - 4-импульс замкнутой системы гравитирующих масс (без учета энергии-импульса гравитационного поля).

Левую часть уравнения (2) запишем следующим образом

$$\int (-g)\,(R_{ik} - 1/2\, g_{ik} R)\, d S^k = 4\pi R_i \qquad (4)$$

При необходимости можно, конечно, ввести сюда и космологический член.

Каким образом можно интерпретировать величину R_i в (4) ? Если рассмотреть подинтегральное выражение в (4), то R_i будет представлять собой сумму сложных величин с размерностью длины. Тензор R_{ik} в (1) имеет размерность *см*$^{-2}$. Понятие кривизны, по определению, является величиной, обратной радиусу кривизны. Процедура интегрирования в (4) подразумевает увеличение степени подинтегрального выражения. В данном случае происходит преобразование от отрицательной второй степени к положительной первой степени. Можно предположить, что величина R_i в (4) связана с радиусом кривизны некоторой 4-области пространства-времени. С другой стороны, величина R_i должна характеризовать размер области, охватываемой гиперповерхностью S^k. Очевидно, что величина R_i является обобщением радиус-вектора в классической механике. А одна и та же векторная физическая величина может быть представлена как в контра-, так и в ковариантных компонентах.

Проинтегрированное уравнение Эйнштейна (1) принимает следующий простой вид

$$R_i = (2\, k/c^3)\, P_I \qquad (5)$$

В (5) 4 - импульс P_i равен

$$P_i = mc\, dx_i / ds$$

где m - полная масса системы, dx_i / ds - 4 - скорость. В частности, в случае статического поля и статического распределения материи $dx_a / ds = 0$ ($a = 1,2,3$), $dx_0 / ds = 1$ и из (5) мы будем иметь

$$R_0 = (2k/c^3)P_0 = (2k/c^3)mc(dx_0/ds) = (2k/c^2)m \qquad (5')$$

В (5') R_0 есть не что иное как гравитационный радиус системы масс R_g. Таким образом, соотношение (5) является обобщением выражения для гравитационного радиуса системы масс в случае нестатического поля.

Уравнение (5) можно записать также следующим образом

$$R_i = (2k/c^3)mc\,dx_i/ds = R_g U_i \qquad (5'')$$

где R_g - гравитационный радиус системы масс, U_i = 4-скорость. Нетрудно видеть, что проинтегрированное уравнение Эйнштейна (5) аналогично также соотношению для гравитационного радиуса геона [3].

$$R_g = (2k/c^3)P$$

где P - импульс фотона, что указывает на их взаимосвязь.

На основании того, что в статическом случае уравнение (5') идентично выражению для гравитационного радиуса массы m, мы утверждаем, что величина R_i является гравитационным радиусом системы масс в динамическом случае. Соотношение (5') является частным случаем соотношения (5), а именно в случае статического поля и статического распределения масс. Таковым, в частности, является статическое сферически-симметричное поле, создаваемое покоящимся сферически-симмметричным телом. Вспомним в связи с этим решение Шварцшильда.

Уравнение Эйнштейна (5) аналогично также уравнению для второй космической скорости в классической механике. Действительно, (5) можно переписать следующим образом

$$c = [(2k/c)(P_i/R_i)]^{1/2} \qquad (6)$$

Вторая космическая скорость для замкнутой системы гравитирующих масс в ОТО в 4-мерном пространстве- времени оказывается равной скорости света. Мир событий всегда замкнут в силу предельного характера второй космической скорости из соотношения (6).

Теперь можно проанализировать преобразованное уравнение Эйнштейна (5) с квантовотеоретической точки зрения. В координатном представлении уравнение (5) принимает вид

$$(\underline{P}_i - (c^3/2k)\underline{R}_i)\psi = 0 \qquad (7)$$

где $\underline{P}_i$ - оператор 4-импульса, а $\underline{R}_i$ - оператор локального радиуса кривизны. Из (7) получаем

$$-ih(\partial\psi/\partial R^i) - c^3/2k(R_i\psi) = 0 \qquad (8)$$

Из (8) видно, что оператор величины R_i имеет вид

$$\underline{R}_i = -2i\,l^2_{пл}\,\partial/\partial R^i$$

где $l_{пл}$ - фундаментальная планковская длина. Видно, что оператор $\underline{R}_i$ является самосопряженным оператором.

Можно также наряду с соотношениями $E = \hbar w$ и $P = \hbar k$ записать соотношение

$$R_i = l^2_{пл}k_i$$

где k_i - волновой 4 - вектор. Родство этого соотношения и проинтегрированного уравнения Эйнштейна (5) очевидно.

Частное решение (8) имеет вид

$$\psi = \psi_o \exp[(i/2l^2_{пл})R_i R^i] \qquad (9)$$

Отметим, что в прямоугольных декартовых координатах ковариантная и контравариантная компоненты вектора совпадают. В искривленном пространстве (в криволинейных координатах) это уже не так.

Из (9) следует, что компоненты R_i и R^i в планковских масштабах не коммутируют между собой

$$\underline{R}_i\underline{R}^i - \underline{R}^i\underline{R}_i = -2i\,l^2_{пл} \qquad (10)$$

где $\underline{R}_i$ и $\underline{R}^i$ - операторы, а также соотношение неопределенностей

$$\Delta R_i \Delta R^i \geq l^2_{пл} \qquad (11)$$

Действительно, согласно определению 4-векторов, производные $\partial\psi/\partial R^i$ составляют ковариантный вектор, где $\psi = \psi(R^i)$ - скалярная функция. Тогда находим, что произведение операторов $\underline{R}_i$ и $\underline{R}^i$ некоммутативно

$$(\underline{R}_i\underline{R}^i - \underline{R}^i\underline{R}_i)\,\psi(R^i) \equiv -2i\,l^2_{пл}\partial/\partial R^i[R^i\psi(R^i)] -$$

$$- R^i(- 2i\, l^2_{пл})\, \partial/\partial R^i\, [\, \psi(R^i)] = - 2i\, l^2_{пл}\, \psi(R^i) \neq 0\, ;$$

Подчеркнем, что по i нет суммирования. Видно, что соотношение неопределенностей (11) является следствием соотношения неопределенностей Гейзенберга для импульса и координаты и уравнения (5). Решая (5) в импульсном представлении (или учитывая, что $\Delta R_i = \hbar / \Delta P_i$) мы получим соответствующее соотношение неопределенностей для сопряженных компонент импульса P_i и P^i

$$\Delta P_i\, \Delta P^i \leq P^2_{пл}$$

или проще

$$P^2 \leq P^2_{пл} = \hbar c^3 / k$$

т.е. импульс частицы не может быть больше планковского импульса $(\hbar c^3 / k)^{1/2}$.

Соотношение неопределенностей (11) говорит о том, что пространство-время в планковских масштабах микроискривленно и его кривизна (или радиус кривизны R) флуктуирует.

Отметим, что появление ко- и контравариантных компонент тензоров непосредственно связано с относительным движением систем отсчета. Уже в СТО движущаяся со скоростью V система координат K' является косоугольной, что ведет к необходимости делать различие между ко- и контравариантными координатами ([5], стр.65).Ясно поэтому, что *ковариантные координаты вектора связаны с движением, с импульсом движущейся системы отсчета, а контравариантные - с координатой*. Это дает ключ к построению квантовой теории гравитации. Если рассмотреть скалярную функцию контравариантных компонент $\psi(x^i)$, то компоненты вектора $\partial\psi/\partial x^i$ являются ковариантными компонентами. Поэтому в микромире в планковском масштабе *ко- и контравариантные сопряженные компоненты векторов* (*тензоров*) *не коммутируют между собой*, как не коммутируют сопряженные координата и импульс частицы. Видимо, именно на этой основе можно построить квантовую теорию гравитации.

Соотношение неопределенностей (11) можно переписать следующим образом

$$l^2_{пл} / \Delta R_i\, \Delta R^i \leq 1$$

или, проще $l^2_{пл} / R^2 <= 1$, откуда следует, что

$$1 - l^2_{пл} / R^2 \geq 0 \qquad (11')$$

В ([2],[3]с.32) было показано, что для областей пространства-времени с размером R неопределенность метрического тензора - порядка $l^2_{пл} / R^2$, что согласуется с (11'), если учесть, что компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{oo} = 1 - R_g / R = 1 - 2l^2_{пл} / R^2$$

В инерциальной системе отсчета $g_{oo} = 1$, однако теперь мы видим, что в планковских масштабах эта величина даже в инерциальной системе отсчета должна иметь вид

$$g_{oo} = 1 - \Delta g = 1 - 2\, l^2_{пл} / R^2$$

где Δg - неопределенность метрического тензора g_{oo} , или так называемая вакуумная добавка. Видно также, что вакуумные флуктуации гравитационного поля обусловлены некоммутативностью ковариантных и контравариантных компонент радиуса кривизны пространства-времени в планковских масштабах.

Аналогичный вид имеют и соотношения неопределенностей, полученные Бором и Розенфельдом [4]

$$(\Delta L)^2 \geq l^2_{пл} \text{ и } \Delta g\, (\Delta L)^2 \geq 2\, l^2_{пл} \qquad (12)$$

где L - размер области. Отсюда $\Delta g \geq 2\, l^2_n / (\Delta L)^2$.

Таким образом мы видим, что найденное нами соотношение неопределенностей (11) согласуется с ранее полученными результатами. В то же время оно имеет более конкретный 4-мерный характер и подчеркивает некоммутативность сопряженных ковариантных и контравариантных компонент одной и той же физической величины**.** ***И в этом его новизна***.

Наличие в соотношении неопределенностей (11) ковариантной и контравариантной компонент 4-радиус-вектора подсказывает механизм совмещения линейной квантовой теории с нелинейной общей теорией относительности. Этот механизм предполагает некоммутативность сопряженных ковариантных и контравариантных компонент тензоров в общей теории относительности. Квантовую теорию гравитации необходимо строить с учетом именно этого обстоятельства.

В случае евклидовой геометрии понятия контравариантных и ковариантных величин совпадают.

Однако *в планковских масштабах совпадение ковариантных и контравариантных величин принципиально невозможно в связи с некоммутативностью соответствующих сопряженных компонент тензоров, а потому в планковских масштабах невозможна и евклидова геометрия. Таким образом прослеживается связь между квантовой неопределенностью и кривизной пространства-времени в планковских масштабах*. Для пространственно-временных величин пределом неопределенности является планковская длина, а для импульсно-энергетических величин - планковская энергия (или импульс).

В инерциальной системе отсчета в декартовой системе координат интервал dS определяется формулой

$$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{13}$$

В неинерциальной системе отсчета интервал dS имеет вид

$$dS^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

В инерциальной системе отсчета при пользовании декартовыми координатами величины g_{ik} равны

$$g_{oo} = 1, \ldots\ldots\ g_{11} = g_{22k} = g_{33} = -1$$

Однако из вышеизложенного ясно, что g_{oo} в планковских масштабах будет равен

$$g_{oo} = 1 - 2l^2_{пл} / R^2$$

даже в инерциальной системе отсчета, т.е. меньше 1. Поэтому формула (13) справедлива только когда $dS >> l_{пл} = 10^{-33}$ см.

Из неравенства (11) следует, что не существует такого эксперимента, с помощью которого можно было бы отличить квантованное гравитационное поле от неквантованного. Чтобы отличить "классическое" поле от квантового, необходимо иметь возможность измерять длины, меньшие планковской длины. Но, в соответствии с полученным соотношением неопределенностей, нельзя измерить длину, меньшую планковской длины. Ниже планковской длины операции измерения теряют смысл

Операции измерения теряют свой смысл еще и потому, что в планковских масштабах отсутствует инструментарий для подобных измерений, так как даже фотоны при планковской энергии превращаются в микрочерные дыры [3]. Тем самым гравитация, возможно, оказывается по ту сторону законов классической и квантовой теорий.

Литература:

1. *Бронштейн М. П. //* ЖЭТФ, 6, (1936)
2. *Климец А. П.* Физика и философия. Поиск истины. — Брест: Форт, 1997.
3. *Klimets A. P.* FIZIKA B (Zagreb) **9** (2000) 1, 23 - 42 или http://fizika.hfd.hr/fizika_b/bv00/b9p023.htm
4. *Тредер Г. Ю.//* В сб. «Проблемы физики: классика и современность». — М.: Мир,1982.
5. *Угаров В. А.* Специальная теория относительности. — М.: Наука,1977.

Статья поступила в редакцию 05.06.2007 г.

Klimetz A. P.

The quantum gravitation theory

The variant of the general relativity theory quanting is considered. The uncertainty principle is proposed for gravitation field.

Key words: general relativity theory, quantum gravitation, uncertainty principle.