УДК 530.12, 530.16, 515.14, 537.8

Николенко А.Д.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО КОНТИНУУМА С ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ, ОТВЕЧАЮЩЕГО ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ

E-mail: alniko@ukr.net

Доказана теорема, утверждающая, что для плоского однородного изотропного пространства Минковского с псевдоевклидовой метрикой можно построить отображение, порождающее изоморфное ему линейное векторное пространство, несущее евклидову метрику и отвечающее физической реальности. Отмечено, что такая модель плоского пространственно-временного континуума, несущего евклидову метрику, описывает физическую реальность не менее адекватно, чем пространство-время Минковского и учитывает все релятивистские эффекты. Это позволяет построить более удобную для анализа геометрическую интерпретацию специальной теории относительности и сделать наглядными основные ее результаты.

Ключевые слова: специальная теория относительности, пространственно-временной континуум, пространство Минковского, псевдоевклидова метрика.

1. Введение. Пространство-время Минковского

Герман Минковский в 1908 году декларировал, что реальное мировое пространство-время (плоское однородное и изотропное) обладает такими же линейными и метрическими свойствами, как и псевдоевклидово 4-х мерное пространство (пространство Минковского). На основании этого представления может быть построена модель мира, которая всецело согласуется со специальной теории относительности (СТО) [1],[2] и ни в чем не противоречит той картине мира, которую рисуют нам чувственные восприятия.

Пространство Минковского (далее обозначаемое как K^4_M) можно рассматривать как 4-х мерное линейное векторное комплексное пространство над полем вещественных чисел, на котором можно определить соответствующие ортонормированные базисы, см. например [3]. Верхним индексом в обозначении пространств и подпространств будем указывать их размерность.

На векторном пространстве K^4_M определена симметричная билинейная функция $\Psi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ для любой пары векторов $\mathbf{u},\mathbf{v}$ этого пространства. Значение функции $\Psi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ является их скалярным произведением $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ на этом пространстве и определяется вещественным числом, см. например [4].

Метрические свойства пространства Минковского определяются метрикой псевдоевклидова пространства с сигнатурой (– + + +), представляемой квадратичной формой индекса 1.

Векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ортогональны относительно $\Psi(\mathbf{u},\mathbf{v})$, если $\Psi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$. Система векторов (например, представляющих векторный базис пространства) $\mathbf{u}_1\ldots\mathbf{u}_j\ldots\mathbf{u}_s$ ортогональна, если все вектора этой системы попарно ортогональны. Если при этом $\Psi(\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j\cdot}) = (\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j\cdot}) = \pm 1$, $j= 1,2,\ldots s$, то такая система векторов является ортонормированной.

Системы координат на K^4_M задаются посредством указания точки начала координат (полюса) и ортонормированных базисов: для некоторой системы координат S (условно назовем ее лабораторной) – четверки базисных векторов (ортов) $\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$; для системы координат S' (условно назовем ее сопутствующей) – четверки базисных векторов (ортов) $\mathbf{p}'_0,\mathbf{p}'_1,\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}'_3$. Для удобства будем считать, что полюса обоих систем координат совмещены. Объекты сопутствующих систем координат будем отличать от аналогичных объектов лабораторных систем штрихами. Все базисы полагаем правоориентированными.

Среди каждой четверки базисных векторов (ортов) линейного векторного пространства K^4_M один имеет длину, выраженную мнимым числом – мнимой единицей i (орт $\mathbf{p}_0$, представляющий временную ось в системе координат S, и орт $\mathbf{p}'_0$, представляющий временную ось в системе координат S'), а длины остальных собственно пространственных ортов выражаются вещественными числами [3].

Структура любого базиса — например $\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ — характеризуется соответствующей матрицей Грама Γ($\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$), элементами которой являются попарные скалярные произведения базисных векторов ($\mathbf{p}_j,\mathbf{p}_k$) = g_{jk}, j = 0,1,2,3; k =0,1,2,3. Сопоставление каждому базису линейного пространства его матрицы Грама определяет метрический тензор этого пространства [5].

Скалярные квадраты ортов, представляющих в пространстве Минковского оси времени, записываются через их скалярные произведения следующим образом:

$$(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_0) = g_{00} = (\mathbf{p}'_0,\mathbf{p}'_0) = g'_{00} = -1, \tag{1}$$

а для собственно пространственных ортов справедливо:

$$(\mathbf{p}_j,\mathbf{p}_j) = g_{jj} = (\mathbf{p}'_j,\mathbf{p}'_j) = g'_{jj} = 1,\ \ j = 1,2,3. \tag{2}$$

Для ортогональных базисов ($\mathbf{p}_j,\mathbf{p}_k$) = g_{jk} = 0 при $j \neq k$, j = 0,1,2,3; k =0,1,2,3. В результате матрица Грама любого ортонормированного базиса на пространстве Минковского принимает следующий вид:

$$\Gamma(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3) = \begin{Vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Симметричная билинейная функция Ψ($\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$) для векторов $\mathbf{u} = \sum_{j=0}^{3} x^j \mathbf{p}_j$ и $\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{3} y^k \mathbf{p}_k$ с учетом введенных обозначений выражается следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \Psi\Big(\sum_{j=0}^{3} x^j \mathbf{p}_j , \sum_{k=0}^{3} y^k \mathbf{p}_k\Big) = \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} x^j y^k\ \ \Psi(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k) = \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} x^j y^k\ \ (\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k) = \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} g_{jk} x^j y^k. \tag{4}$$

Соответствующая квадратичная форма функции Ψ($\mathbf{u}$,$\mathbf{u}$) принимает вид:

$$\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} g_{jk} x^j x^k = g_{00}(x^0)^2 + g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2. \tag{5}$$

Можно перейти к представлению, в котором длины всех четырех ортов каждого базиса на K^4_M выражаются вещественным числом путем подстановки $\mathbf{p}_0$ = ($i\boldsymbol{\tau}$) для лабораторной системы координат и $\mathbf{p}'_0$ = ($i\boldsymbol{\tau}'$) для сопутствующей. Здесь $\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau}'$ – единичные орты с вещественной длиной, а i - мнимая единица.

2. Двойной базис

Представление вектора в двойном базисе. В ряде практически важных случаев желательно представить запись вектора в 4-х мерном пространстве одновременно в двух разных системах отсчета. Такой подход используется, в частности, при формулировании принципа относительности в физике. В связи с этим введем следующую форму описания некоторого вектора $\mathbf{u} \in K^4_M$.

В лабораторной системе координат S его можно представить как упорядоченный набор четырех величин — физических координат вектора $\mathbf{u}$= x^0, x^1, x^2, x^3 . В сопутствующей (штрихованной) системе координат S' этот же вектор будет записан следующим образом $\mathbf{u}$= x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 . Тогда его запись в двойном базисе {S, S'}, т. е. в лабораторной S и сопутствующей S' системах координат, представляет собой набор из 8 величин и имеет вид:

$$\mathrm{u} = x^0, x^1, x^2, x^3 = x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 . \tag{6}$$

или

$$\begin{cases} \mathbf{u} = x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 , \\ \mathbf{u} = x^0, x^1, x^2, x^3 . \end{cases} \tag{7}$$

Эту запись вектора можно представить также в матричном виде – как матрицу-столбец:

$$\begin{Vmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Vmatrix} = \mathbf{u}. \qquad (8)$$

Удвоение числа переменных в записи вектора **u** не означает изменения размерности векторного пространства, в котором определен этот вектор.

Вектор **u** можно записать также в разложениях по ортонормированному базису $\{\mathbf{p}_j\}$ системы координат S — $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ и в разложении по ортонормированному базису $\{\mathbf{p}'_j\}$ системы координат S' — $\mathbf{p}'_0$, $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$, $\mathbf{p}'_3$ в виде следующего *тождества*:

$$\mathbf{u} = x^0\mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^{3} x^k \mathbf{p}_k = x'^0\mathbf{p}'_0 + \sum_{k=1}^{3} x'^k \mathbf{p}'_k . \qquad (9)$$

Здесь члены $x^0\mathbf{p}_0$ и $x'^0\mathbf{p}'_0$ представляют особое — временное — измерение в пространстве Минковского, и это отделяет их от собственно пространственных переменных x^1, x^2, x^3 и x'^1, x'^2, x'^3, которые в связи с этим выделены в отдельные позиции.

Взаимосвязь базисов и координат векторов в двойном базисе.

1. *Переход от базиса* $\{\mathbf{p}_j\}$ *к базису* $\{\mathbf{p}'_j\}$. Орты базиса $\{\mathbf{p}'_j\}$однозначно определяются своими разложениями по ортам базиса $\{\mathbf{p}_j\}$:

$$\begin{cases} \mathbf{p}'_0 = q_{00}\mathbf{p}_0 + q_{10}\mathbf{p}_1 + q_{20}\mathbf{p}_2 + q_{30}\mathbf{p}_3, \\ \mathbf{p}'_1 = q_{01}\mathbf{p}_0 + q_{11}\mathbf{p}_1 + q_{21}\mathbf{p}_2 + q_{31}\mathbf{p}_3, \\ \mathbf{p}'_2 = q_{02}\mathbf{p}_0 + q_{12}\mathbf{p}_1 + q_{22}\mathbf{p}_2 + q_{32}\mathbf{p}_3, \\ \mathbf{p}'_3 = q_{03}\mathbf{p}_0 + q_{13}\mathbf{p}_1 + q_{23}\mathbf{p}_2 + q_{33}\mathbf{p}_3. \end{cases}$$

или

$$\mathbf{p}'_j = q_{0j}\mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^{3} q_{kj}\mathbf{p}_k , \; j = 0,1,2,3.$$

Коэффициенты q_{kj}, j, k = 0,1,2,3 однозначно определяют невырожденную *матрицу перехода* Q_1 от базиса$\{\mathbf{p}_j\}$ к базису $\{\mathbf{p}'_j\}$,:

$$Q_1 = \begin{Vmatrix} q_{00} q_{10} q_{20} q_{30} \\ q_{01} q_{11} q_{21} q_{31} \\ q_{02} q_{12} q_{22} q_{32} \\ q_{03} q_{13} q_{23} q_{33} \end{Vmatrix}.$$

2.*Обратный переход от базиса* $\{\mathbf{p}'_j\}$ *к базису*$\{\mathbf{p}_j\}$. Матрица такого перехода Q_2 является обратной по отношению к квадратной матрице Q_1, т.е. $Q_2 = Q_1^{-1}$. Здесь в записи Q_1^{-1} верхним индексом обозначается обратная матрица. Можно записать матрицу перехода Q_2 в виде:

$$Q_2 = \begin{Vmatrix} a_{00} a_{10} a_{20} a_{30} \\ a_{01} a_{11} a_{21} a_{31} \\ a_{02} a_{12} a_{22} a_{32} \\ a_{03} a_{13} a_{23} a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Матрица перехода Q_2 задает однозначное разложение ортов базиса $\{\mathbf{p}_j\}$ по ортам базиса $\{\mathbf{p}'_j\}$:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_0 = a_{00}\mathbf{p}'_0 + a_{10}\mathbf{p}'_1 + a_{20}\mathbf{p}'_2 + a_{30}\mathbf{p}'_3, \\ \mathbf{p}_1 = a_{01}\mathbf{p}'_0 + a_{11}\mathbf{p}'_1 + a_{21}\mathbf{p}'_2 + a_{31}\mathbf{p}'_3, \\ \mathbf{p}_2 = a_{02}\mathbf{p}'_0 + a_{12}\mathbf{p}'_1 + a_{22}\mathbf{p}'_2 + a_{32}\mathbf{p}'_3, \\ \mathbf{p}_3 = a_{03}\mathbf{p}'_0 + a_{13}\mathbf{p}'_1 + a_{23}\mathbf{p}'_2 + a_{33}\mathbf{p}'_3. \end{cases}$$

или

$$\mathbf{p}_k = a_{0k}\mathbf{p}'_0 + \sum_{j=1}^{3} a_{jk}\mathbf{p}'_j\,,\ \ k = 0,1,2,3.$$

3.*Преобразование координат вектора при переходе от базиса* $\{\mathbf{p}_j\}$ *к базису* $\{\mathbf{p}'_j\}$. Координаты произвольного вектора $\mathbf{u}$ относительно базиса $\{\mathbf{p}'_j\}$линейно выражаются через координаты этого вектора относительно базиса $\{\mathbf{p}_j\}$. Коэффициенты этих линейных выражений образуют *матрицу преобразования координат* W_1 при переходе от базиса $\{\mathbf{p}_j\}$ к базису $\{\mathbf{p}'_j\}$. Эта матрица связана с матрицей перехода Q_2 от базиса $\{\mathbf{p}'_j\}$ к базису $\{\mathbf{p}_j\}$ соотношением: $W_1 = Q_2^T$. Она может быть записана в виде:

$$W_1 = \begin{Vmatrix} a_{00}a_{01}a_{02}a_{03} \\ a_{10}a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{20}a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{30}a_{31}a_{32}a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Координаты вектора $\mathbf{u}$ в этом случае в двойном базисе связаны системой равенств:

$$\begin{cases} x'^0 = a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 + a_{03}x^3, \\ x'^1 = a_{10}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3, \\ x'^2 = a_{20}x^0 + a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3, \\ x'^3 = a_{30}x^0 + a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3. \end{cases} \tag{10}$$

или

$$x'^k = a_{k0}x^0 + \sum_{j=1} a_{kj}x^j\,,\ k = 0,1,2,3.$$

4.*Обратное преобразование координат вектора при переходе от базиса* $\{\mathbf{p}'_j\}$ *к базису* $\{\mathbf{p}_j\}$. Координаты вектора $\mathbf{u}$ относительно базиса $\{\mathbf{p}_j\}$также линейно выражаются через координаты этого вектора относительно базиса $\{\mathbf{p}'_j\}$. Коэффициенты этих линейных выражений образуют соответствующую *матрицу преобразования координат* W_2 при переходе от базиса $\{\mathbf{p}'\}$ к базису $\{\mathbf{p}_j\}$. Данная матрица связана с матрицей перехода Q_1 от базиса $\{\mathbf{p}_j\}$ к базису $\{\mathbf{p}'_j\}$ соотношением: $W_2 = Q_1^T$, см. например [4] и имеет вид:

$$W_2 = \begin{Vmatrix} q_{00}q_{01}q_{02}q_{03} \\ q_{10}q_{11}q_{12}q_{13} \\ q_{20}q_{21}q_{22}q_{23} \\ q_{30}q_{31}q_{32}q_{33} \end{Vmatrix}.$$

Координаты вектора $\mathbf{u}$ при данном преобразовании в двойном базисе связаны равенствами:

$$\begin{cases} x^0 = q_{00}x'^0 + q_{01}x'^1 + q_{02}x'^2 + q_{03}x'^3, \\ x^1 = q_{10}x'^0 + q_{11}x'^1 + q_{12}x'^2 + q_{13}x'^3, \\ x^2 = q_{20}x'^0 + q_{21}x'^1 + q_{22}x'^2 + q_{23}x'^3, \\ x^3 = q_{30}x'^0 + q_{31}x'^1 + q_{32}x'^2 + q_{33}x'^3. \end{cases} \tag{11}$$

или

$$x^k = q_{k0}x'^0 + \sum_{j=1} q_{kj}x'^j\,,\ k = 0,1,2,3.$$

Физическое пространство-время, представляемое пространством Минковского K^4_M, является плоским, однородным и изотропным, что соответствует перечисленным соотношениям линейного пространства. В записи, учитывающей взаимное движение в пространстве координатных систем, преобразования координат на пространстве Минковского K^4_M имеют вид прямых и обратных преобразований Лоренца.

3. Базовая теорема

Базовая теорема. *Для плоского однородного изотропного пространства Минковского K^4_M с псевдоевклидовой метрикой можно определить такое отображение* **f**, *которое порождает изоморфное ему 4-х мерное линейное векторное пространство K^4_N, несущее евклидову метрику*.

Для доказательства этой теоремы определим отображение пространства Минковского **f**: $K^4_M \to K^4_N$, порождающее пространство K^4_N с указанными свойствами. Объекты пространства K^4_N будем отличать от аналогичных объектов пространства K^4_M звездочкой.

Отображение f: $\boldsymbol{K^4_M \to K^4_N}$. Пространство K^4_N порождается отображением **f** таким образом, что каждый вектор $\mathbf{u} \in K^4_M$ переходит в некоторый элемент $\mathbf{u}^* \in K^4_N$. При этом запись вектора **u** и элемента пространства K^4_N $\mathbf{u}^* = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ в двойных базисах примет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = x'^0, x'^1, x'^2, x'^3, \\ \mathbf{u} = x^0, x^1, x^2, x^3. \end{cases} \qquad \mathrm{f}: \rightrightarrows \begin{cases} \mathbf{u}^* = x'^{*0}, x'^{*1}, x'^{*2}, x'^{*3}, \\ \mathbf{u}^* = x^{*0}, x^{*1}, x^{*2}, x^{*3}. \end{cases} \tag{12}$$

Запись $\mathbf{u}^* = x'^{*0}, x'^{*1}, x'^{*2}, x'^{*3}$ будем рассматривать как упорядоченную запись координат элемента $\mathbf{u}^*$ в сопутствующей координатной системе S'^*, запись $\mathbf{u}^* = x^{*0}, x^{*1}, x^{*2}, x^{*3}$ – как упорядоченную запись координат элемента $\mathbf{u}^*$ в лабораторной координатной системе S^* на K^4_N, т. е. $S'^*, S^* \in K^4_N$.

Вектора **u** и элементы **u*** в двойном базисе можно записать в виде матриц-столбцов:

$$\begin{Vmatrix} x'^{*0} \\ x'^{*1} \\ x'^{*2} \\ x'^{*3} \\ x^{*0} \\ x^{*1} \\ x^{*2} \\ x^{*3} \end{Vmatrix} = \mathbf{u}^*, \quad \begin{Vmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Vmatrix} = \mathbf{u}. \tag{13}$$

Правило преобразования координат при отображении **f**: $K^4_M \to K^4_N$ зададим следующим образом:

$$\begin{cases} x'^{*0} \equiv x^0, \\ x'^{*i} \equiv x'^i, i = 1,2,3, \\ x^{*0} \equiv x'^0, \\ x^{*i} \equiv x^i, i = 1,2,3. \end{cases} \tag{14}$$

Подчеркнем, что все формулы (14) представляют собой соотношения в двойном базисе, связывающие координаты объектов на K^4_M и K^4_N и имеющие характер *тождеств*. Отметим, что отображение **f** определено на двойном базисе.

С учетом соотношений (14) запись (12) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = x'^0, x'^1, x'^2, x'^3, \\ \mathbf{u} = x^0, x^1, x^2, x^3. \end{cases} \qquad \mathrm{f}: \rightrightarrows \begin{cases} \mathbf{u}^* = x^0, x'^1, x'^2, x'^3, \\ \mathbf{u}^* = x'^0, x^1, x^2, x^3. \end{cases} \tag{15}$$

Отсюда видно, что при данном отображении *собственно пространственные координаты x'^1, x'^2, x'^3 и x^1, x^2, x^3 в сопутствующих и лабораторных системах отсчета переходят сами в себя, а координаты x^0 и x'^0 в сопутствующей и лабораторной системах S'^* и S^* меняются местами.*

Другими словами, отображение **f** для координат вектора сводится к *транспозиции* (перестановке) его временных координат x^0 *и* x'^0 в лабораторной и сопутствующей системах отсчета. Оно затрагивает только координаты x'^0 и x^0 и не изменяет подпространства E'^3 и E^3, задаваемые собственно пространственными координатами x'^1, x'^2, x'^3 и x^1, x^2, x^3, т.е. эти подпространства являются *инвариантными* относительно отображения **f**. Следовательно, при данном отображении $E'^3 \to E'^3*$, и с учетом того, что E'^3* совпадает с E'^3, можно записать, что $E'^3 \to E'^3$. Аналогично при отображении для лабораторных систем координат: $E^3 \to E^3$. Отметим, что подпространства E^3 и E'^3 можно рассматривать как гиперповерхности на пространствах K^4_M и K^4_N, несущие евклидову метрику.

Подпространство E^3 как линейная оболочка тройки собственно пространственных базисных векторов лабораторной системы координат $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ в общем случае не совпадает с подпространством E'^3 как линейной оболочкой тройки базисных векторов сопутствующей системы координат $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$, $\mathbf{p}'_3$ на K^4_M.

Транспозиция временных координат вектора в сопутствующей и лабораторной системах отсчета при отображение **f** приводит к необходимости записи вектора в двойном базисе.

С помощью такой записи можно построить квадратную симметрическую матрицу F отображения **f** 8-го порядка**,** которая связывает координаты векторов $\mathbf{u} \in K^4_M$ и соответствующих им элементов $\mathbf{u}^* \in K^4_N$ согласно соотношениям (14), т.е. $\mathbf{u}^* = F\mathbf{u}$ при записи $\mathbf{u}^*$ и $\mathbf{u}$ в двойном базисе в виде матриц-столбцов (13):

$$F = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Учитывая, что координаты вектора в лабораторной и сопутствующей системе координат связаны линейными соотношениями вида (10), (11), можно с их помощью учесть транспозицию временных координат при отображении **f** и записать формулы отображения (14) в следующем виде:

$$\begin{cases} x'^{*0} = x^0 = q_{00}x'^0 + q_{01}x'^1 + q_{02}x'^2 + q_{03}x'^3, \\ x'^{*i} = x'^i, i = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} x^{*0} = x'^0 = a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 + a_{03}x^3, \\ x^{*i} = x^i, i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{17}$$

Отметим, что правые части этих уравнений представляют собой многочлены степени не выше 1. Это дает основание предполагать, что отображение **f** является линейным.

Такая запись отображений позволяет понизить порядок матрицы отображения координат. В этом случае отображение координат описывается двумя квадратными матрицами 4-го порядка – для сопутствующей системы координат A', и для лабораторной A. Эти матрицы формируются из коэффициентов уравнений (16) и (17), задающих отображение **f** для каждой из этих систем отсчета по отдельности:

$$A' = \begin{Vmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad A = \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Очевидно, что матрицы A' и A зависят от конкретного выбора двойного базиса, т.е. пар лабораторная система координат – сопутствующая система координат на K^4_M. В отличие от них вид матрицы F не зависит от выбора этих пар.

Взаимная однозначность отображения f. Отображение **f** является взаимно однозначным в силу того, что каждый элемент **u*** пространства K^4_N является образом одного и только одного вектора **u** пространства K^4_M.

Допустим обратное. Пусть элемент **u*** является образом нескольких прообразов – векторов **u**. Поскольку собственно пространственные переменные не изменяются при отображении

f, то в этом случае оставшейся временной переменной x'^{*0} этого элемента в сопутствующей системе координат на K^4_N должны соответствовать несколько переменных x^0 – компонент соответствующих прообразов - векторов **u** в записи лабораторной системы координат на K^4_M. Однако переменные x'^{*0} и x^0 тождественно связаны между собой линейными соотношениями (14). То же самое можно сказать и о переменной x^{*0} элемента **u*** в записи лабораторной системы координат на K^4_N и переменной x'^0 его прообраза в записи сопутствующей системы координат на K^4_M, также связанных линейными тождественными соотношениями (14). Это допускает существование у одного образа одного и только одного прообраза, что и доказывает взаимную однозначность отображения **f**.

Кроме того, чтобы отображение **f**, задаваемое линейными соотношениями (12) и (13), было взаимно однозначным, необходимо и достаточно, чтобы детерминанты матриц A' и A не были равными нулю, т.е $\det A' \neq 0$ и $\det A \neq 0$. Коэффициенты q_{00} и a_{00} не могут быть равными нулю, так как в случае их нулевого значения утрачивается взаимная связь временных координат в разных системах отсчета на пространстве Минковского, что невозможно. Следовательно, условие $\det A' \neq 0$ и $\det A \neq 0$ выполняется, и матрицы отображения координат A' и A являются невырожденными, что подтверждает полученный результат.

Линейность отображения f. Покажем, что отображение **f** является линейным, так как удовлетворяет условиям линейности: для любых двух векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ выполняется соотношение: $\mathbf{f}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)$, и для любого вектора **u** выполняется $\mathbf{f}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{u})$.

1.Сумма двух векторов $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2 \in K^4_M$ в двойном базисе может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases}\mathbf{u}_1 = & x_1'^0, x_1'^1, x_1'^2, x_1'^3 \;, \\ \mathbf{u}_1 = & x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3 \;. \end{cases} + \begin{cases}\mathbf{u}_2 = & x_2'^0, x_2'^1, x_2'^2, x_2'^3 \;, \\ \mathbf{u}_2 = & x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3 \;. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases}\mathbf{u}_3 = & (x_1'^0 + x_2'^0),(x_1'^1 + x_2'^1),(x_1'^2 + x_2'^2),(x_1'^3 + x_2'^3) \;, \\ \mathbf{u}_3 = & (x_1^0 + x_2^0),(x_1^1 + x_2^1),(x_1^2 + x_2^2),(x_1^3 + x_2^3 \;. \end{cases}$$

Выполнив отображение **f** векторов $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ на пространство-время K^4_N, получим:

$$\begin{cases}\mathbf{f}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1{*} = & x_1^0, x_1'^1, x_1'^2, x_1'^3 \;, \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1{*} = & x_1'^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3 \;. \end{cases} + \begin{cases}\mathbf{f}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2{*} = & x_2^0, x_2'^1, x_2'^2, x_2'^3 \;, \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2{*} = & x_2'^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3 \;. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases}\mathbf{f}(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3{*} = & (x_1^0 + x_2^0),(x_1'^1 + x_2'^1),(x_1'^2 + x_2'^2),(x_1'^3 + x_2'^3) \;, \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3{*} = & (x_1'^0 + x_2'^0),(x_1^1 + x_2^1),(x_1^2 + x_2^2),(x_1^3 + x_2^3 \;. \end{cases}$$

Отсюда видно, что из соотношения $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3$ следует $\mathbf{f}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)$.

2.Пусть λ – некоторое число числового поля *k*. Покажем, что для любого $\mathbf{u}^* \in K^4_N$ и любого $\lambda \in k$ выполняется соотношение $\mathbf{f}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}^*$:

$$\begin{cases}\mathbf{f}(\lambda\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \lambda x'^0, \lambda x'^1, \lambda x'^2, \lambda x'^3 \;, \\ \mathbf{f}(\lambda\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \lambda x^0, \lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3 \;. \end{cases} = \begin{cases} \lambda x^0, \lambda x'^1, \lambda x'^2, \lambda x'^3 = \lambda\mathbf{u}^*, \\ \lambda x'^0, \lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3 = \lambda\mathbf{u}^*. \end{cases}$$

Следовательно, отображение **f** *сохраняет линейные операции*, и, таким образом, является *линейным*.

Пространство K^4_N как линейное векторное пространство. Как видно из полученных выше результатов, в порожденном отображением **f** пространстве K^4_N выполняются свойства линейного векторного пространства над числовым полем *k*.

Действительно, для каждых двух элементов $\mathbf{u}_1^*$, $\mathbf{u}_2^* \in K^4_N$ по описанным выше правилам можно определить их сумму $\mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^* = \mathbf{u}_3^*$, при этом $\mathbf{u}_3^* \in K^4_N$, и для любого элемента пространства $\mathbf{u}^*$ можно построить соответствующий элемент $\mathbf{v}^* = \lambda\mathbf{u}_1^*$, при этом $\mathbf{v}^* \in K^4_N$, $\lambda \in k$.

Правила образования элементов пространства K^4_N удовлетворяют аксиомам линейного векторного пространства. Нетрудно видеть, что правило сложения обладает следующими свойствами:

1. $\mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^* = \mathbf{u}_2^* + \mathbf{u}_1^*$ для любых $\mathbf{u}_1^*,\mathbf{u}_2^* \in K^4_N$.
2. $(\mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^*) + \mathbf{u}_3^* = \mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^* + \mathbf{u}_3^*)$ для любых $\mathbf{u}_1^*,\mathbf{u}_2^*,\mathbf{u}_3^* \in K^4_N$.

3. Существует элемент **0** (нуль-вектор) такой, что $\mathbf{u}^* + \mathbf{0} = \mathbf{u}^*$ для любого $\mathbf{u}^* \in K^4_N$. Все координаты нуль-вектора равны нулю.
4. Для каждого $\mathbf{u}^* \in K^4_N$ существует элемент $\mathbf{v}^* \in K^4_N$ такой, что $\mathbf{u}^* + \mathbf{v}^* = 0$.

Правило умножения на число обладает следующими свойствами:

1. $1 \cdot \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*$ для любого $\mathbf{u}^* \in K^4_N$.
2. $\alpha(\beta\mathbf{u}^*) = (\alpha\beta)\mathbf{u}^*$ для любого $\mathbf{u}^* \in K^4_N$ и $\alpha, \beta \in k$.
3. $(\alpha + \beta)\mathbf{u}^* = \alpha\mathbf{u}^* + \beta\mathbf{u}^*$ для любого $\mathbf{u}^* \in K^4_N$ и $\alpha, \beta \in k$.
4. $\alpha(\mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^*) = \alpha\mathbf{u}_1^* + \alpha\mathbf{u}_2^*$ для любых $\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^* \in K^4_N$ и $\alpha \in k$.

Таким образом, элементы пространства K^4_N являются векторами, а само пространство K^4_N можно определить как *линейное векторное пространство*.

Сохранение линейной зависимости (независимости) систем векторов при отображении f. Линейная зависимость (независимость) системы векторов сохраняется *при всяком* линейном отображении (см. например [4]). Следовательно, *линейно независимая* система базисных векторов лабораторной системы координат $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ на пространстве Минковского будет отображена в *линейно независимую* систему векторов $\mathbf{f}(\mathbf{p}_0)$, $\mathbf{f}(\mathbf{p}_1)$, $\mathbf{f}(\mathbf{p}_2)$, $\mathbf{f}(\mathbf{p}_3)$, образующих базис в пространстве K^4_N. Аналогично и для сопутствующей системы координат.

Существование обратного отображения $\mathbf{f}^{-1}$. Покажем, что для отображения **f** пространства K^4_M на пространство K^4_N определено обратное линейное отображение $\mathbf{f}^{-1}$ пространства K^4_N на пространство K^4_M.

Воспользуемся известным результатом линейной алгебры, согласно которому если определено некоторое взаимно однозначное линейное отображение **D** линейного пространства U на линейное пространство V, то определено и обратное линейное отображение $\mathbf{D}^{-1}$ пространства V на пространство U – см. например [4].

Отображение **f** представляет собой взаимно однозначное линейное отображение, а пространства K^4_N и K^4_M являются линейными пространствами. Следовательно, указанный результат применим для отображения **f,** и для него определено единственное обратное линейное отображение $\mathbf{f}^{-1}$: $K^4_N \rightarrow K^4_M$.

Любой вектор задается *упорядоченной* системой его координат, что позволяет обеспечить выделенность временных координат по отношению к собственно пространственным. Это необходимое условие для существования единственного обратного отображения $\mathbf{f}^{-1}$.

Реализуется обратное отображение следующим образом - собственно пространственные координаты в сопутствующих и лабораторных системах отсчета переходят сами в себя, а координаты x^{*0} и x'^{*0} в сопутствующей и лабораторной системах координат меняются местами, т.е. их транспозиция выполняется в обратном порядке.

Отметим, что для взаимно однозначного линейного отображения любого вектора **u** на K^4_M справедливо соотношение $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$. Используя понятие произведения отображений (которое обозначим как «$\circ$»), его можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{f}\circ\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{I}^*,\ \mathbf{f}^{-1}\circ\mathbf{f} = \mathbf{I}, \qquad (19)$$

где $\mathbf{I}^*$, $\mathbf{I}$ тождественные отображения на K^4_N и K^4_M.

Сохранение размерности пространства при отображении f. Пространство Минковского имеет размерность $\dim K^4_M = 4$. Размерность пространства, порождаемого отображением **f** пространства Минковского, сохраняется и также равна 4. Покажем это.

Трехмерное линейное подпространство, задаваемое собственно пространственными координатами x'^1, x'^2, x'^3 и x^1, x^2, x^3, инвариантно относительно отображения **f** согласно его определению и соответственно сохраняет свою размерность, равную 3. С другой стороны, в соответствии с известным результатом линейной алгебры (см. например [4]), размерность некоторого линейного пространства V, получаемого в результате линейного отображения пространства U, не превышает размерности пространства U. Следовательно, в нашем случае размерность пространства K^4_N не может превышать размерности пространства Минковского, равную 4.

Таким образом, размерность пространства K^4_N может быть равна либо 3, либо 4. Допустим, что размерность пространства K^4_N равна 3. На четырехмерном пространстве Минковского можно определить некоторую линейную комбинацию из четырех *линейно независимых* векторов $\lambda_0\mathbf{u}_0 + \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3$.

Отобразим каждый из этих векторов на K^4_N, и составим из полученных образов аналогичную линейную комбинацию:

$$\lambda_0\,\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) + \lambda_1\,\mathbf{f}(\mathbf{u}_1) + \lambda_2\,\mathbf{f}(\mathbf{u}_2) + \lambda_3\,\mathbf{f}(\mathbf{u}_3) = \mathbf{0}.$$

Эта линейная комбинация из *четырех* векторов будет равна нулевому вектору при нетривиальной комбинации коэффициентов λ_i, i = 0,1,2,3 (при которой не все коэффициенты λ_i одновременно обращаются в нуль), т.е. неизбежно будет *линейно зависимой*, так как определена по предположению на *трехмерном* пространстве K^4_N.

Выше было показано существование обратного *линейного* отображения $\mathbf{f}^{-1}$. Отобразим с помощью этого отображения *линейно зависимые* вектора $\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)$,$\mathbf{f}(\mathbf{u}_1)$,$\mathbf{f}(\mathbf{u}_2)$,$\mathbf{f}(\mathbf{u}_3)$ на пространство Минковского. Как было отмечено выше, линейная зависимость векторов сохраняется при всяком линейном отображении. Следовательно, линейно зависимые вектора $\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)$,$\mathbf{f}(\mathbf{u}_1)$,$\mathbf{f}(\mathbf{u}_2)$,$\mathbf{f}(\mathbf{u}_3)$ на K^4_N при линейном отображении $\mathbf{f}^{-1}$ перейдут в линейно зависимые вектора $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_0))$, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_1))$, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_2))$, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_3))$ на K^4_M. Но $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_1)) = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{f}^{1}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_2)) = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_3)) = \mathbf{u}_3$. Таким образом, вектора $\mathbf{u}_0$,$\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$,$\mathbf{u}_3$ на K^4_M должны быть линейно зависимыми, что прямо противоречит исходному утверждению о линейной независимости этих векторов. Полученное противоречие позволяет сделать заключение, что линейная размерность пространства K^4_N не может быть равна 3 и, следовательно, с необходимостью равна 4.

Этот же результат можно получить следующим образом. Отображение является *невырожденным* в том и только в том случае, если оно имеет единственное обратное отображение, в данном случае $\mathbf{f}^{-1}$, отображающее $K^4_N \to K^4_M$ так, что выполняются соотношения (19). Отображение $\mathbf{f}$ этому условию удовлетворяет и, следовательно, является невырожденным. Но невырожденные линейные отображения сохраняют линейную независимость векторов, а потому и линейную размерность отображаемых многообразий (в данном случае линейного пространства K^4_N), см. [6].

Теперь верхний индекс в обозначении пространства K^4_N можно считать указанием на его линейную размерность, т.е. $\dim K^4_N = 4$.

Изоморфизм отображения f. Учитывая, что оба пространства-времени K^4_M и K^4_N имеют одну и ту же размерность, можно утверждать, что взаимно-однозначное отображение $\mathbf{f}$: $K^4_M \to K^4_N$, сохраняющее линейные операции, представляет собой изоморфизмом. Изоморфизм отображения $\mathbf{f}$ позволяет объекты, заданные на K^4_M, представлять (моделировать) с помощью объектов на K^4_N, и наоборот. Данный изоморфизм задает определенный класс эквивалентности между объектами на пространствах K^4_M и K^4_N.

Влияние отображения f на структуру векторных базисов. Рассмотрим вопрос, влияет ли отображение **f,** определяемое транспозицией временных координат, т.е. перестановкой *скалярных* величин, на структуру *векторных* базисов пространства K^4_N . Другими словами, найдем матрицу перехода от базиса на пространстве K^4_M к соответствующему ему базису на пространстве K^4_N.

Допустим, что при данном отображении ортонормированные векторные базисы не изменяются, т.е. для них матрицей перехода является единичная матрица, а матрица Грама для таких базисов на K^4_N сохраняет свой вид (3). Этот факт отражается соотношениями $g_{jk}* = g_{jk}$ и $g'_{jk}* = g'_{jk}$, j = 0,1,2,3; k = 0,1,2,3.

Сопоставим некоторому произвольному вектору **u** псевдоевклидова пространства K^4_M его скалярный квадрат (квадратичную форму), который можно записать относительно лабораторной и сопутствующих систем координат (в ортонормированных базисах) следующим образом:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (x^0)^2\,(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0) + \sum_{j=1}^{3}(x^j)^2(\mathbf{p}_j,\mathbf{p}_j) = (x'^0)^2\,(\mathbf{p}'_0, \mathbf{p}'_0) + \sum_{j=1}^{3}(x'^j)^2(\mathbf{p}'_j,\mathbf{p}'_j). \qquad (20)$$

Отсюда с учетом соотношений (1) и (2) можно записать:

$$(x^0)^2 g_{00} + \sum_{j=1}^{3}(x^j)^2 g_{jj} = (x'^0)^2 g'_{00} + \sum_{j=1}^{3}(x'^j)^2 g'_{jj}. \qquad (21)$$

Получим теперь выражение для $(x^0)^2$:

$$(x^0)^2 = (x'^0)^2\frac{g'_{00}}{g_{00}} + \frac{1}{g_{00}}\{\sum_{j=1}^{3}(x'^j)^2 g'_{jj} - \sum_{j=1}^{3}(x^j)^2 g_{jj}\}. \qquad (22)$$

Подставляя сюда значения g_{jj} и g'_{jj}, j = 0,1,2,3 из (3) с учетом соотношений (1) и (2), получим:

$$(x^0)^2 = (x'^0)^2 - \sum_{j=1}^{3}(x'^j)^2 + \sum_{j=1}^{3}(x^j)^2 . \tag{23}$$

Поскольку, согласно предположению, векторные базисы при отображении **f** не меняются, то $\mathbf{e}_j = \mathbf{p}_j$ и $\mathbf{e}'_j = \mathbf{p}'_j$, j = 0,1,2,3; соответственно на пространстве K^4_N скалярные квадраты базисных ортов в этом случае будут равны $g_{jj}^* = g_{jj}$ и $g'_{jj}{}^* = g'_{jj}$, j = 0,1,2,3.

Запишем выражение для скалярного квадрата вектора $\mathbf{u}^* = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \in K^4_N$ с учетом соотношений (14):

$$(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) = (x'^0)^2(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) + \sum_{j=1}^{3}(x^j)^2(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j) = (x^0)^2(\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_0) + \sum_{j=1}^{3}(x'^j)^2(\mathbf{e}'_j, \mathbf{e}'_j),$$

отсюда:

$$(x'^0)^2 g_{00}^* + \sum_{j=1}^{3}(x^j)^2 g_{jj}^* = (x^0)^2 g'_{00}{}^* + \sum_{j=1}^{3}(x'^j)^2 g'_{jj}{}^* . \tag{24}$$

С учетом соотношений $g_{jj}^* = g_{jj}$ и $g'_{jj}{}^* = g'_{jj}$, j = 0,1,2,3 выражение для $(x^0)^2$ в этом случае принимает вид:

$$(x^0)^2 = (x'^0)^2 \frac{g_{00}}{g'_{00}} - \frac{1}{g'_{00}}\{\sum_{j=1}^{3}(x'^j)^2 g'_{jj} - \sum_{j=1}^{3}(x^j)^2 g_{jj}\}. \tag{25}$$

Подставляя сюда значения g_{jj} и g'_{jj}, j = 0,1,2,3 из (3) с учетом соотношений (1) и (2), получим:

$$(x^0)^2 = (x'^0)^2 + \sum_{j=1}^{3}(x'^j)^2 - \sum_{j=1}^{3}(x^j)^2 . \tag{26}$$

Очевидно, что переменная x^0 в формуле (26) должна быть тождественна этой же переменной в формуле (23). Сравнение же полученных значений для x^0 в этих формулах показывает, что они *не тождественны*. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение неверно, и отображение **f** приводит к изменению векторных базисов на K^4_N. Поскольку любой вектор свои метрические свойства воспринимает от базиса пространства, то можно говорить об изменении метрики пространства, связанном с отображением **f.**

Лемма. *Отображение* $\mathbf{f}$: $K^4_M \to K^4_N$ *выполнимо тогда и только тогда, когда соответствующее отображение базисов задается комплексной матрицей перехода следующего вида*:

$$H = \begin{Vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{27}$$

Матрица H не меняется при транспонировании, т.е. является симметрической и не зависит выбора конкретных базисов лабораторных и сопутствующих систем координат.

Достаточность. Так как dim K^4_N = 4, то порядок матрицы Грама для любого базиса на этом пространстве равен 4. Подпространство E^3 при отображении переходит само в себя, следовательно, соответствующие диагональные элементы g_{jj}^*, j = 1,2,3 матрицы Грама для базиса на K^4_N будут равны 1.

Определим величину оставшегося диагонального элемента g_{00}^* (и $g'_{00}{}^*$ для сопутствующей системы координат), учитывая, что при этом должно выполняться требование $g_{00}^* \neq -1$ (и соответственно $g'_{00}{}^* \neq -1$), так как в противном случае возникнет описанное выше противоречие. Используя матрицу перехода H, и допуская запись векторов в качестве элементов матриц, получим базис $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ на K^4_N :

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{e}_0 = -i\mathbf{p}_0$. Используя описанную выше подстановку $\mathbf{p}_0 = (i\boldsymbol{\tau})$, где $\boldsymbol{\tau}$ — вещественный вектор единичной длины, получим значение $\mathbf{e}_0 = -i\mathbf{p}_0 = -i(i\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}$. Следовательно, $\mathbf{e}_0$ есть вещественный вектор единичной длины, а величина $g_{00}^* = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) = 1$. Аналогично $g'_{00}{}^* = 1$, и $g'_{00}{}^* = g_{00}^*$.

Запишем полученное выше матричное равенство в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0 = -i\mathbf{p}_0, \\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{p}_4. \end{cases} \tag{28}$$

Проверим ортогональность полученных базисных векторов: $(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_k)=(-i\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_k)= -i(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_k)=0$; $(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_0) = (\mathbf{p}_k,-i\mathbf{p}_0) = -i(\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_0) = 0$, $k = 1,2,3$; $(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = (\mathbf{p}_j,\mathbf{p}_k) = 0$, $j = 1,2,3$; $k =1,2,3$.

Таким образом, все диагональные элементы матрицы Грама полученного базиса равны 1, а остальные элементы этой матрицы – нулю, т.е. имеем единичную матрицу. Базис ортонормирован тогда и только тогда, когда его матрица Грама – единичная матрица. Следовательно, матрица перехода H переводит ортонормированные на пространстве Минковского базисы систем S, S' в ортонормированные базисы систем S^*, S'^* на пространстве K^4_N.

Этот результат можно получить иным образом. Обратную матрицу H^{-1} можно найти из матричного соотношения $HH^{-1} = E$, где E – единичная матрица. И она имеет вид:

$$H^{-1}=\begin{Vmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица считается унитарной, если выполняется соотношение $H^{*T} = H^{-1}$. Здесь H^* — матрица, сопряженная матрице H, а верхним индексом T обозначается операция транспонирования матрицы, см. [6]. Нетрудно видеть, что условие унитарности матрицы H выполняется.

Для того, чтобы базисы, получаемые в результате линейного отображения ортонормированных базисов, также были ортонормированными, необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода была унитарной [4]. Поскольку матрица перехода H имеет вид унитарной, то ортонормированный базис $\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ отобразится в ортонормированный базис $\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ на K^4_N. Ортонормированный базис имеет единичную матрицу Грамма, причем нетрудно видеть, что имеет место $g'_{00}{}^* = 1$, и $g'_{00}{}^* = g_{00}^*$.

Подставляя полученные значения элементов матрицы Грама в соотношение (24), получим тождественность переменных x^0, вычисляемых по формулам (22) и (25). Нетрудно показать тождественность остальных координатных переменных, определяемых аналогично. Таким образом, тождественные соотношения (14), задающие отображение $\mathbf{f}$, в этих условиях выполняются, что и доказывает достаточные условия леммы.

Необходимость. Любые ортонормированные базисы имеют на К4М одинаковые матрицы Грама, в том числе базисы координатных систем S′ и S. Следовательно, одинаковые элементы этих матриц будут равны: $g'_{00} = g_{00}$. С учетом этого соотношения формула (21) примет вид:

$$(x^0)^2 g_{00} + \sum_{j=1} (x^j)^2 g_{jj} = (x'^0)^2 g_{00} + \sum_{j=1} (x'^j)^2 g'_{jj},$$

откуда

$$g_{00} = \frac{\sum_{j=1} (x'^j)^2 g'_{jj} - \sum_{j=1} (x^j)^2 g_{jj}}{(x^0)^2 - (x'^0)^2} \tag{29}$$

С другой стороны, на K^4_N формула (24), учитывающая отображение координат $\mathbf{f}$, имеет вид:

$$(x'^0)^2 g_{00}^* + \sum_{j=1} (x^j)^2 g_{jj}^* = (x^0)^2 g'_{00}{}^* + \sum_{j=1} (x'^j)^2 g'_{jj}{}^*. \tag{30}$$

Ортонормированные базисы координатных систем S' и S отображаются на линейное пространство K^4_N одним и тем же образом. Поэтому одинаковые элементы матриц Грама, полученных в результате отображения базисов S'^* и S^* на K^4_N, будут совпадать: $g'_{00}{}^* = g_{00}^*$. Подпространство E^3 при отображении **f** переходит само в себя, следовательно, соответствующие диагональные элементы матриц Грама этих базисов при этом отображении не изменятся, т.е. $g_{jj}^* = g_{jj}$, $g'^{*}_{jj} = g'_{jj}$, $j = 1,2,3$. Подставляя данные равенства в формулу (30), имеем:

$$g_{00}^* = -\frac{\sum_{j=1}^{3}(x'^j)^2 g'_{jj} - \sum_{j=1}^{3}(x^j)^2 g_{jj}}{(x^0)^2 - (x'^0)^2}. \qquad (31)$$

Из соотношений (29) и (31) следует, что при $(x^0)^2 \neq (x'^0)^2$ выполняется соотношение:

$$g_{00}^* = -g_{00}. \qquad (32)$$

Поскольку $g_{00} = -1$, то $g_{00}^* = +1$. Таким образом, для реализации отображения **f** необходимо выполнение условия: $(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_0) = -(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0)$,

откуда

$$\mathbf{e}_0 = -i\mathbf{p}_0. \qquad (33)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий отображения **f** соотношение (33) с необходимостью приводит к матрице перехода H, что и доказывает лемму.

Полагаем, что и при $(x^0)^2 = (x'^0)^2$ условия выполнения отображения **f** сохраняются те же, что и на всей остальной области определения. Это предположение не противоречит полученным результатам.

Метрические свойства K^4_N (трансформация метрики при отображении f). Для определения свойств пространства-времени K^4_N, порожденного применением отображения **f** к пространству-времени K^4_M, необходимо установить, сохраняются ли при этом отображении метрические свойства пространства-времени Минковского.

На псевдоевклидовом пространстве K^4_M метрика введена симметричной билинейной функцией $\Psi(\mathbf{u},\mathbf{v})$, представленной соответствующей билинейной формой (4).

Рассмотрим вопрос, как изменится данная билинейная функция в результате отображения **f:** $K^4_M \rightarrow K^4_N$. Полученная в результате этого отображения симметричная билинейная функция $\Psi^*(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*)$ на K^4_N будет *положительно определенной*, если при любом $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{0}$ значение соответствующей квадратичной функции $\Psi^*(\mathbf{u}^*,\mathbf{u}^*)$ положительно и обращается в нуль лишь в том случае, когда обращаются в нуль все переменные x^{*i}. С учетом определенных выше значений $g_{00}^* = g_{11}^* = g_{22}^* = g_{33}^* = +1$ имеем:

$$\sum_{j=0}\sum_{k=0} g_{jk}^* x^{*j} x^{*k} = g_{00}^*(x^{*0})^2 + g_{11}^*(x^{*1})^2 + g_{22}^*(x^{*2})^2 + g_{33}^*(x^{*3})^2 = (x^{*0})^2 + (x^{*1})^2 + (x^{*2})^2 + (x^{*3})^2. \qquad (34)$$

Сравнение выражений (5) и (34) показывает, что в результате отображения **f**: $K^4_M \rightarrow K^4_N$ метрические свойства не сохраняются, и полученное в результате отображения пространство-время K^4_N имеет иное мероопределение, чем псевдоевклидово пространство K^4_M.

Как следует из выражения (34), $\Psi^*(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*)$ является положительно определенной. Так как в результате отображения на K^4_N получена положительно определенная квадратичная форма $\Psi^*(\mathbf{u}^*,\mathbf{u}^*)$ с вещественными коэффициентами, то на основании известной теоремы линейной алгебры [5] можно утверждать, что пространство K^4_N является евклидовым, т.е. несет евклидову метрику.

Базовая теорема доказана.

4. Пространство K^8

Пусть вещественные вектора $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ образуют линейно независимую систему. Тогда система векторов вида $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$, $i\mathbf{q}_0$, $i\mathbf{q}_1$, $i\mathbf{q}_2$, $i\mathbf{q}_3$ также будет линейно независима, см. [7]. Порождаемое этой системой векторов линейное векторное многообразие образует пространство K^8 размерности $\dim K^8 = 8$.

Выделим в системе векторов $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$, $i\mathbf{q}_0$, $i\mathbf{q}_1$, $i\mathbf{q}_2$, $i\mathbf{q}_3$ подсистему $i\mathbf{q}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$. Любая подсистема линейно независимой системы векторов также является линейно независимой и может образовывать базис векторного пространства. Нетрудно видеть, что линейная оболочка, порождаемая базисом $i\mathbf{q}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$, образует линейное векторное пространство, совпадающее с пространством K^4_M.

Выделим теперь в системе векторов $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$, $i\mathbf{q}_0$, $i\mathbf{q}_1$, $i\mathbf{q}_2$, $i\mathbf{q}_3$ подсистему $\mathbf{q}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$. Эта подсистема линейно независимых векторов также может образовывать базис векторного пространства. Линейная оболочка, порождаемая этим базисом $\mathbf{q}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$, образует линейное векторное пространство, совпадающее с пространством K^4_N.

Как базис пространства K^4_M, так и базис пространства K^4_N включают в себя одну и ту же линейно независимую систему векторов $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$, линейная оболочка которых образует вещественное подпространство E^3, т.е. $E^3 \hookrightarrow K^4_M$ и $E^3 \hookrightarrow K^4_N$. В этом случае пространство K^4_M можно рассматривать как прямую сумму подпространства E^3 и его ортогонального дополнения с базисом $i\mathbf{q}_0$, а K^4_N – как прямую сумму того же подпространства E^3 и его ортогонального дополнения с базисом $\mathbf{q}_0$. Следовательно, E^3 можно рассматривать как пересечение пространств K^4_M и K^4_N, т.е. $E^3 = K^4_M \cap K^4_N$.

Построим векторное пространство K^5 как линейную оболочку линейно независимых векторов $i\mathbf{q}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$, образующих базис этого пространства. K^4_M с базисом $i\mathbf{q}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$, K^4_N с базисом $\mathbf{q}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$, E^3 с базисом $\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$ можно рассматривать как подпространства по отношению к пространству K^5. Размерность суммы двух подпространств равна сумме их размерностей минус размерность их пересечения, см. [5]. Отсюда размерность пространства K^5 равна:

$$\dim K^5 = \dim K^4_M + \dim K^4_N - \dim (K^4_M \cap K^4_N) = 5.$$

Таким образом, введение пятимерного векторного пространства K^5 позволяет объединить в его рамках пространство Минковского K^4_M и пространство K^4_N, а также пространство E^3, входящие в него как подпространства. Отображение $\mathbf{f}$ в этом случае можно рассматривать как преобразование, осуществляемое в рамках единого пространства K^5.

5. Правило выполнения отображения f

В ряде случаев удобно воспользоваться следующим правилом выполнения отображения **f** для скалярных соотношений.

Пусть имеется некоторое скалярное равенство w, одна часть которого $\alpha(x^0,x^1,x^2,x^3)$ выражена в переменных (координатах) системы отсчета S, а другая часть $\beta(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)$ выражена в переменных системы отсчета S':

$$w\colon \alpha(x^0,x^1,x^2,x^3) = \beta(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)\ .$$

Выполним отображение **f** этого равенства с учетом соотношений (14):

$$\mathbf{f}(w)\colon \mathbf{f}[\alpha(x^0,x^1,x^2,x^3) = \beta(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)\ ],$$

отсюда

$$w^*\colon \alpha^*(x'^0,x^1,x^2,x^3) = \beta^*(x^0,x'^1,x'^2,x'^3)\ ,$$

и выражая это соотношение в переменных систем отсчета S^* и S'^* на K^4_N имеем:

$$w^*\colon\ \alpha^*(x^{*0},x^{*1},x^{*2},x^{*3}) = \beta^*(x'^{*0},x'^{*1},x'^{*2},x'^{*3}),$$

Если в выражении w на K^4_M обе его части $\alpha(x^0,x^1,x^2,x^3)$ и $\beta(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)$ были выражены в переменных координатных систем S и S' соответственно, то в образе w^* этого выражения на K^4_N обе его части $\alpha^*(x^{*0},x^{*1},x^{*2},x^{*3})$ и $\beta^*(x'^{*0},x'^{*1},x'^{*2},x'^{*3})$ выражены в переменных координатных систем S^* и S'^*.

Но эти переменные связаны *тождественными* соотношениями (14), и эту тождественную связь между ними переход от выражения w к его образу w^* не может нарушать. Это условие будет выполняться только в том случае, если переход от скалярного выражения w к его образу w^* также будет иметь *тождественный* характер.

Следовательно, переход $w \to w^*$ сводится к тождественному, т.е. обычному алгебраическому преобразованию выражения w, заключающемуся в перегруппировке переменных в этом выражении таким образом, чтобы в ее результате одна часть $\alpha^*(x^{*0},x^{*1},x^{*2},x^{*3})$ оказалась выражена в переменных системы S^*, а вторая $\beta^*(x'^{*0},x'^{*1},x'^{*2},x'^{*3})$ – в переменных системы S'^*. Соответственно, обратное отображение $\mathbf{f}^{-1}$ сводится к перегруппировке переменных в выражении w^* , в результате которой одна часть этого выражения α выразится в переменных системы S, а вторая β — в переменных системы S'.

Поскольку отображение **f** сводится к обычной перегруппировке переменных в уравнении, не изменяющей их значений, то можно сделать важный вывод, что *физическое содержание уравнений при отображениях* $\mathbf{f}, \mathbf{f}^{-1}$ *не меняется***.** Это открывает возможность моделировать физические соотношения на пространстве Минковского соответствующими соотношениями на пространстве K^4_N с евклидовой метрикой.

Приведем пример, иллюстрирующий применение полученного правила к метрическим соотношениям. В сопутствующей и лабораторной системах координат S' и S произвольно взятый вектор $\mathbf{u} \in K^4_M$ может быть записан в следующем виде:

$$\mathbf{u} = x'^0\mathbf{p}'_0 + \sum_{k=1} x'^k\mathbf{p}'_k = x^0\mathbf{p}_0 + \sum_{k=1} x^k\mathbf{p}_k \,. \qquad (35)$$

Положение сопутствующей системы координат S' можно выбирать произвольно. Выберем такое ее положение, при котором $\sum_{k=1} x'^k\mathbf{p}'_k = 0$. В связи с этим соотношение (35) примет вид:

$$\mathbf{u} = x'^0\mathbf{p}'_0 = x^0\mathbf{p}_0 + \sum_{k=1} x^k\mathbf{p}_k \,.$$

Сопоставим данному вектору его скалярный квадрат:

$$-(x'^0)^2 = -(x^0)^2 + \sum_{k=1} (x^k)^2 \,. \qquad (36)$$

Модуль произвольного вектора $\mathbf{u}$ можно рассматривать как некоторый пространственно-временной интервал s на пространстве Минковского. Очевидно, что в данном случае он будет равен величине x'^0.

Введем следующие обозначения. Величина x^0 соответствует временной компоненте и ее можно записать в виде $x^0 = ct$, где t – время лабораторной системы координат S, а c – коэффициент пропорциональности. С учетом этих обозначений $s = x'^0 = ct'$, где t' - время сопутствующей системы координат S'. Переходя к дифференциалам, можно равенство (36) записать как:

$$-ds^2 = - c^2dt^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 + d(x^3)^2. \qquad (37)$$

Данное выражение представляет метрическую форму (метрику) псевдоевклидова пространства-времени K^4_M с сигнатурой (– + + +), и соответствует ее общепринятой записи в специальной теории относительности, см. например [8].

Рассмотрим, как изменится метрика, заданная выражением (37) при отображении $\mathbf{f}$. В соответствии с полученным выше правилом, для выполнения этого отображения необходимо произвести в соотношении (37) алгебраическую перегруппировку временных переменных при сохранении пространственных, что в результате дает:

$$c^2dt^2 = ds^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 + d(x^3)^2. \qquad (38)$$

Учтем, что $s = ct'$. В связи с этим выражение (38) принимает вид:

$$c^2dt^2 = c^2d(t')^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 + d(x^3)^2.$$

Аналогично интервалу ds, выражение c^2dt^2 представляет собой дифференциал пространственно-временного интервала на K^4_N, который обозначим как $d\rho$. После произведенной перегруппировки (т.е. выполнения отображения $\mathbf{f}$) согласно правилу левая часть этого выражения представляет сопутствующую систему координат S'^*, а правая выражена - лабораторную систему координат S^* на пространстве K^4_N. Выражая это соотношение в переменных пространства K^4_N, окончательно имеем:

$$d\rho^2 = c^2d(t^*)^2 + d(x^{*1})^2 + d(x^{*2})^2 + d(x^{*3})^2. \qquad (39)$$

Здесь через t^* выражена временная координата лабораторной системы S^*, равная t'. Полученная квадратичная форма (39) отражает метрику образованного в результате отображения $\mathbf{f}$ пространства K^4_N с сигнатурой (+,+,+,+).

Сравнение записи метрики (39) на K^4_N с записью метрики (37) на K^4_M демонстрирует трансформацию метрики при данном отображении из псевдоевклидовой на K^4_M в евклидову на K^4_N, что хорошо согласуется со сделанными ранее выводами.

6. Адекватность описания пространства-времени в форме пространства K^4_N физической реальности

Трансформации метрики из псевдоевклидовой в евклидову открывает возможность при исследовании пространства-времени использовать наиболее разработанный математический аппарат исследования евклидовых пространств. На псевдоевклидовом пространстве не определенно важнейшее геометрическое понятие угла и в ряде случаев приходится применять не имеющие наглядности и весьма громоздкие гиперболические функции [8], тогда как пространство с евклидовой метрикой открывает возможность в аналогичных случаях непосредственно использовать понятие угла и, соответственно, аппарат тригонометрии при описании протекающих в пространстве-времени физических процессов. В частности, понятие взаимного поворота координатных систем в пространстве-времени при пространственном движении тел в пространстве Минковского носит условный характер, тогда как на пространстве K^4_N у этого физического эффекта, лежащего в основе преобразований Лоренца, проявляется реальный геометрический смысл.

Как показано в статьях [9-12], наряду с понятием пространственной скорости v, отражающей скорость движения материальной частицы в пространстве, точнее пространственную компоненту ее движения, можно определить понятие скорости движения времени W, характеризующую ее движение вдоль временной оси пространственно-временного континуума. Причем эти скорости оказываются связанными следующим образом:

$$v = W\sin\alpha, \tag{40}$$

где α — т.н. угол опрокидывания, отражающий взаимный геометрический поворот координатных систем на K^4_N, вызванный движением частицы в пространстве со скоростью v. Отметим также, что соотношение (40) может быть записано в виде:

$$\sin\alpha = \frac{v}{W},\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{v^2}{W^2}} \tag{41}$$

Поскольку инерциальное движение координатных систем на евклидовом пространстве-времени K^4_N представляет собой обычное геометрическое преобразование поворота координатных осей сопутствующей системы координат S'^* относительно лабораторной S^* на величину угла опрокидывания α [9,10], и полагая, что плоскостью поворота является координатная плоскость $x^{*0}Ox^{*1}$, совмещенная с плоскостью $x'^{*0}Ox'^{*1}$ с общим центром вращения в точке O, можно записать:

$$\begin{cases} x'^{*0} = \cos\alpha\, x^{*0} + \sin\alpha\, x^{*1}, \\ x'^{*1} = -\sin\alpha\, x^{*0} + \cos\alpha\, x^{*1}, \\ x'^{*2} = x^{*2}, \\ x'^{*3} = x^{*3}. \end{cases} \tag{42}$$

Выявим теперь связь этих соотношений с преобразованиями Лоренца на K^4_M, для чего необходимо выполнить отображение $\mathbf{f}^{-1}$ этих формул преобразования координат в пространство Минковского K^4_M. С этой целью произведем замену переменных в соответствии с формулами (14):

$$\begin{cases} x^0 = \cos\alpha\, x'^0 + \sin\alpha\, x^1, \\ x'^1 = -\sin\alpha\, x'^0 + \cos\alpha\, x^1, \\ x'^2 = x^2, \\ x'^3 = x^3. \end{cases} \tag{43}$$

В соответствии с правилом выполнения отображения $\mathbf{f}^{-1}$ необходимо произвести в системе (43) перегруппировку переменных так, чтобы с одной стороны находились переменные системы координат S', а с другой – S:

$$\begin{cases} x'^0 = \dfrac{x^0 - \sin\alpha\, x^1}{\cos\alpha}, \\ x'^1 = \dfrac{-\sin\alpha\, x^0 + x^1}{\cos\alpha}, \\ x'^2 = x^2, \\ x'^3 = x^3. \end{cases} \tag{44}$$

При инерциальном движении (т.е. v = const и W = const) имеют место следующие соотношения $x^0 = Wt$, $x'^0 = Wt'$. С их учетом система уравнений (44) принимает вид:

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t^0 - \dfrac{\sin\alpha}{W} x^1}{\cos\alpha}, \\ x'^1 = \dfrac{-\sin\alpha W t + x^1}{\cos\alpha}, \\ x'^2 = x^2, \\ x'^3 = x^3. \end{cases} \tag{45}$$

Здесь переменные t', x'^1, x'^2, x'^3 относятся к сопутствующей системе координат S', а t, x^1, x^2, x^3 — к лабораторной S в пространстве Минковского K^4_M. Используя соотношения (41), уравнения преобразования координат (45) можно выразить следующим образом:

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{W^2} x^1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{W^2}}}, \\ x'^1 = \dfrac{-vt + x^1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{W^2}}}, \\ x'^2 = x^2, \\ x'^3 = x^3. \end{cases} \tag{46}$$

Как показано в работе [9], в современных условиях выполняется равенство $W = c$, здесь c — скорость света в вакууме. Нетрудно видеть, что с учетом этого равенства соотношения (46) принимают вид преобразований Лоренца. Обратные преобразования можно получить аналогично.

Преобразования Лоренца определяют основные релятивистские эффекты и имеют надежное экспериментальное подтверждение. Поскольку при изложенном подходе они выводятся непосредственно из уравнений преобразования координат (42) на K^4_N, то можно считать, что эти преобразования, также как и преобразования Лоренца, адекватно описывают физическую реальность.

На практике описание объектов (событий) на пространстве K^4_N можно построить следующим образом. Пусть наблюдатель N проводит эксперимент с целью проверить некоторое соотношение СТО, например преобразования Лоренца:

$$\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) = \beta(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \tag{47}$$

и для этого он экспериментальным путем регистрирует выполнение соотношения (47) при различных значениях входящих в это выражение переменных. Положим, что отображение **f** этого соотношения приводит к равенству:

$$\alpha^*(x^{*0}, x^{*1}, x^{*2}, x^{*3}) = \beta^*(x'^{*0}, x'^{*1}, x'^{*2}, x'^{*3}). \tag{48}$$

Полагаем, что рядом с наблюдателем N находится наблюдатель N^*, который также регистрирует результаты эксперимента, но при этом временную координату события в лабораторной системе отсчета x^0 он регистрирует как временную координату этого же события в сопутствующей системе отсчета x'^{*0}, а временную координату события в сопутствующей системе отсчета x'^0 он регистрирует как его временную координату в лабораторной системе отсчета x^{*0}. Пространственные координаты наблюдатель N^* в ходе эксперимента регистрирует так же, как и наблюдатель N. Следовательно, наблюдатель N^* в ходе этого эксперимента формирует экспериментальные данные, записанные как объекты на пространстве K^4_N и исследует выполнение соотношения (48).

Допустим теперь, что наблюдатель N экспериментально доказал выполнение соотношения (47), т.е. $\alpha = \beta$, а эксперимент наблюдателя N^* равенство (48) не подтвердил, т.е. по его данным $\alpha^* \neq \beta^*$. Но равенство $\alpha^* = \beta^*$ связано с равенством $\alpha = \beta$ *тождественными* преобразованиями, и его невыполнение должно неизбежно влечь за собой невыполнение равенства $\alpha = \beta$, что противоречит начальному условию. Значит, если соотношение $\alpha = \beta$ отвечает экспериментальным данным, то и соотношение $\alpha^* = \beta^*$ также должно подтверждаться экспериментально.

Следовательно, описание событий на пространстве K^4_N отвечает физической реальности и будет соответствовать экспериментальным данным также, как и описание событий в рамках СТО на пространстве Минковского.

7. Почему реальное пространство-время можно представить и в виде пространства Минковского, и в виде пространства K^4_N

Пространство Минковского есть построение описания пространства-времени и протекающих в нем процессов с точки зрения *локализованного* в определенной (например лабораторной) системе отсчета наблюдателя. Все описания процессов в различных системах отсчета приводятся к единому – *лабораторному* времени локального наблюдателя, и естественным образом отражают его точку зрения. Реальный наблюдатель, как принято считать, всегда локализован, поэтому мы и воспринимаем описания процессов, построенные на базе пространства Минковского, как естественные.

Описание же событий на базе пространства K^4_N связано с приведением времени во всех системах отсчета к ходу *собственного* времени. Такое описание построено с точки зрения условного наблюдателя, *распределенного* одновременно по всем системам отсчета. Оно оказывается существенно проще, чем построенное на базе пространства Минковского, хотя с нашей точки зрения и выглядит неестественным. Вместе с тем, оно представляет собой удобный аппарат исследования процессов, реально протекающих в нашем мире.

И та, и другая форма описания позволяет адекватно отражать физические процессы, протекающие в природе, обе они соответствуют всем экспериментальным данным, в частности описывают релятивистские процессы и эффекты специальной теории относительности, т.е. в конечном итоге адекватно отражают физическую реальность.

Поэтому их можно рассматривать как равноправные формы описания плоского пространства-времени. В связи с этим сошлемся на мнение, высказанное Анри Пуанкаре [13]: "*Никакая геометрия не может быть более истинной, чем другая, та или иная геометрия может быть только более удобной*".

Литература:

1. Эйнштейн А. *Собрание научных трудов* (Под ред. Е И Тамма). — М.: Наука,1965.
2. Логунов А.А. *Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987 г. – 272 с.
3. Сазанов А.А. *Четырехмерный мир Минковского*. — М.: Наука, 1988.
4. Александров П.С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. — М.: Наука, 1979.
5. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. — М.: Наука, 1984.
6. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* - М.: Наука, 1984.
7. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. — М.: Наука, 1969.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.
9. Николенко А.Д. *Пространственно-временной континуум и движение времени* //Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2005. — № 1. — С. 51–64.
10. Николенко А.Д. *Влияние скорости движения времени на реализацию физических законов* // Эниология. — 2005. — № 3(19). — С. 15–31.
11. Николенко А.Д. *Течение времени: условность или физическая реальность? К вопросу идентификации темпорального процесса в специальной теории относительности* //Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2005. — №4. — С. 47–53.
12. Николенко А.Д. *Что такое движение Времени* //Эниология. — 2005. — № 4(20). — С. 27–32.
13. Пуанкаре А. *О науке*. — М.: Наука, 1983.
14. Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры*. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975.

Статья поступила в редакцию 28.04.2004 г.

Nikolenko A. D.

The construction of space-time continuum with Euclidean metrics corresponding to physical reality

The theorem, which asserts that for the flat homogeneus isotropic Minkovski space with pseudo-Euclidean metrics is possible to construct a map generating a isomorphic to it linear vector space bearing Euclidean metrics and corresponding to physical reality, has been proved. It has been stated that such model of flat space-time continuum, bearing Euclidean metrics, describes physical reality not less adequately than Minkovski space-time does and takes into account all relativistic effects. This permits to construct a more suitable for analysis geometric interpretation of the special theory of relativity and to make its main results clear.

Key words: special theory of relativity, space-time continuum, Minkovski space, pseudo-Euclidean metrics