

Климец А. П.

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

E-mail: aklimets@mail.ru

На основе определенного философского подхода обсуждается понятие размерности пространства и вводится понятие обобщенной размерности. Показано, что наблюдаемое 3-мерное пространство внутренне может быть многомерным и даже бесконечномерным пространством.

Ключевые слова: геометрия, размерность пространства, 3-мерное пространство.

Введение

Внешний характер пространственных измерений наложил отпечаток на формирование соответствующих естественно-математических понятий. В частности, это выразилось в представлении о трехмерности пространства. Реальные вещи, тела и процессы, с которыми сталкивается человек в практической деятельности, объемны. По существу, объемность (или емкость) и представляет собой реальную пространственную протяженность.

Пространство не может быть чем-то иным, нежели совокупностью кубических метров. Однако выражение реального объема именно в кубических метрах (см, км и т. п.) явилось результатом длительного развития прежде всего хозяйственной, но вместе с тем и научной практики. Потребность в измерении посевных площадей, расстояний и привели к тому, что исходной основой пространственных измерений явилась длина и ее абстрактное выражение — линия.

Почему трехмерен объем в геометрии Евклида? Потому что в его основе лежит линия, взятая одномерно; линии образуют двумерную плоскость, а из плоскостей строится трехмерный объем. Хотя такой путь оптимален и в наибольшей степени удовлетворяет потребностям практики, он все же не является единственно возможным. Данные археологии подтверждают, что единицы измерения объема (емкости) исторически являются столь же древними, как и естественные измерения времени и длины (день, месяц, ступня и т. п.). Можно предположить, что если бы практические потребности первобытных людей выдвинули на передний план не измерения площадей и расстояний, а измерения объемов, то развитие геометрии могло бы пойти по пути, отличному от проложенного Евклидом.

Говорят, к примеру: такая-то комната больше, чем другая; новый прибор (машина) более компактен и занимает меньше места (меньшее пространство), чем прежняя модель. При всей приблизительности приведенных сравнений реальная пространственная объемность выражена здесь в одном измерении: в отношении «больше — меньше». Если на основе подобных или аналогичных сравнений выработать единицы измерения одномерных объемов и положить их в основу некоторой воображаемой геометрии, то понятие линии в ней могло бы быть совершенно иным: например, выраженным в трех измерениях, скажем, как корень третьей степени из единицы одномерного объема.

Хотя подобное представление на первый взгляд и кажется вычурным, в действительности в нем нет ничего необычного. Разве при измерении линейкой поверхности стола одномерная линия получается не при помощи операций с двумя объемами (поскольку объемны и линейка и стол, поверхность которого как сторона реальной объемности подвергается измерению)? Полученная линия и измеренная длина, а также их численные величины и являются результатом определенного сопоставления реальных объемных предметов.

Из сказанного следует, что ни двух-, ни трех-, ни четырехмерность, ни какая-либо другая многомерность не тождественна реальной пространственной протяженности, а отображает определенные аспекты тех объективных отношений, в которых она может находиться. Материальный мир — это и мир Евклида, и мир Лобачевского, и мир Римана, и мир Минковского, ибо в понятиях любой из геометрий, связанной с именами этих выдающихся ученых, можно описать и отразить реальную пространственную протяженность, как всеобщий атрибут материальной действительности [1].

Модель многомерного пространства

Рассмотрим трехмерное пространство — пространство, каждая точка которого характеризуется тремя числами по отношению к декартовой системе координат. В нем справедлива теорема Пифагора

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \tag{1}$$

где R — расстояние между двумя точками. По сути дела, всю трехмерную евклидовую геометрию можно вывести из соотношения (1).

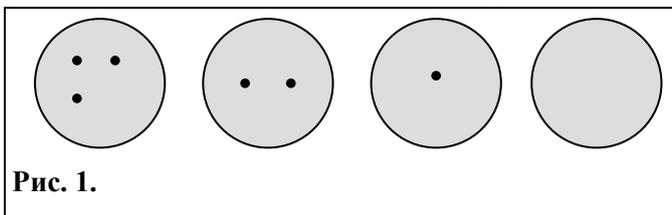


Рис. 1.

Рассмотрим теперь множества, состоящие из точек (рис.1). Здесь точки — символы, элементы множества. Поставим в соответствие множеству размерностей пространства множество точек. Тогда 3-мерное пространство соответствует множеству из трех точек, 2-

мерное — множеству из двух точек, 1- мерное — множеству из одной точки, 0- мерное — пустому множеству точек.

Рассмотрим пересечения подмножеств точек в множестве из трех точек (рис.2). Напомним, что пересечением называется подмножество, принадлежащее обоим пересекающимся подмножествам. На рис.2 пересекаются подмножества, каждое из которых состоит из двух точек. Как видим, подмножества из двух точек могут пересекаться по одной точке. В 3-мерном пространстве это соответствует пересечению двух 2-мерных плоскостей, пересекающихся по 1-мерной прямой.

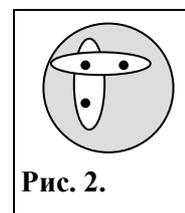


Рис. 2.

Рассмотрим рис.3. Здесь пересечение двух подмножеств из двух точек и одной точки происходит по пустому множеству точек. В 3-мерном пространстве это соответствует пересечению прямой и плоскости в одной точке. Аналогично можно рассмотреть пересечения в 2-мерном пространстве и 1-мерном. Соответствие между множеством точек и множеством размерностей будет полное.

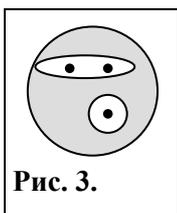


Рис. 3.

Рассмотрим теперь множество из четырех точек, что соответствует 4-мерному пространству (рис.4). Как видим, в 4-мерном пространстве две плоскости могут пересекаться в одной точке, чего не было в 3-мерном пространстве. Это нетрудно представить наглядно, если спроецировать 4-гранный угол на плоскость аналогично проецированию 3-гранного угла на плоскость, воображая, что углы плоскостей при вершине 4-гранника такие же прямые, как и в 3-граннике.

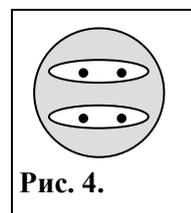


Рис. 4.

Вообще, если рассмотреть множество из n точек, что соответствует n -мерному пространству, то легко обнаружить, что выполняется следующее соотношение

$$l \geq m + k - n \tag{2}$$

где l подмножество точек в пересечении подмножеств m и k ; n — все множество точек.

В теории конечномерных векторных пространств существует аналогичное соотношение, т. е.

$$\dim l \geq \dim m + \dim k - \dim n \tag{3}$$

где dimension — размерность; $\dim l$ — размерность подпространства, получаемого в результате пересечения подпространств m и k ; $\dim n$ — размерность объемлющего пространства [2].

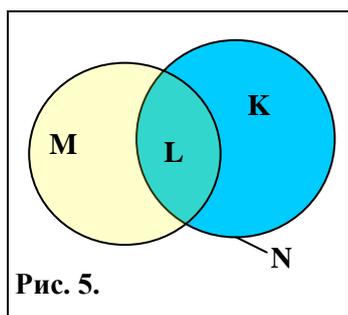


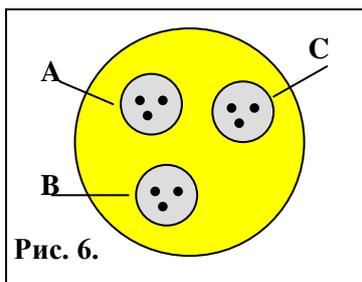
Рис. 5.

Пусть мы имеем бесконечномерное пространство. Тогда в нашей модели это отобразится множеством из бесконечного числа точек (рис.5), т. е. сплошной непрерывной областью. Соотношения (2) и (3) будут иметь здесь вид

$$L \geq M + K - N$$

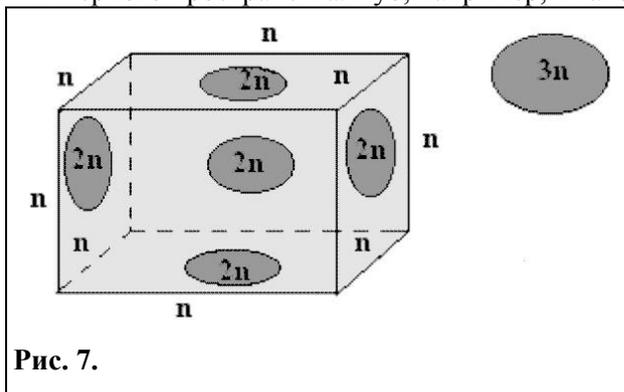
Таким образом мы видим, что в бесконечномерном пространстве понятие дискретной размерности неприменимо.

Рассмотрим теперь множество из 9 точек, что соответствует 9-мерному пространству (рис.6).



Если это множество разбить на подмножества по три точки — A, B, C , то нетрудно видеть, что пересечение подмножеств A, B, C аналогично пересечению подмножеств из трех точек. В 9-мерном пространстве это означает, что три его трехмерных подпространства могут пересекаться в одной точке и быть взаимно ортогональными. Таким образом, 3-мерное подпространство в этом случае может играть роль координатной «оси». Тогда то, что соответствует 2-мерным плоскостям в 3-мерном пространстве, здесь будет 6-мерным подпространством. Мы взяли по три точки

в A, B, C только в качестве примера. Пусть в A, B, C будет по n точек. Тогда мы получим аналог $3n$ -мерного пространства. Куб, например, в таком пространстве будет выглядеть как на рис. 7.



Здесь каждое ребро n -мерно, каждая грань $2n$ -мерна, а сам куб $3n$ -мерен, но точечных вершин все равно восемь. Если в качестве «линии» в $3n$ -мерном пространстве взять его n -мерное подпространство, то мы получим с таким определением обычную 3-мерную геометрию, где каждая точка может быть охарактеризована тремя числами по отношению к n -мерным координатным «осям». Единственное отличие будет состоять в том, что «длина» этой линии будет измеряться метрами в степени n (см, км и т. п.).

Теорема Пифагора в этом случае будет иметь вид:

$$R^2 m^n = X^2 m^n + Y^2 m^n + Z^2 m^n.$$

Таким образом, эта трехмерная геометрия формально ничем не отличается от трехмерной геометрии Евклида.

В принципе n можно устремить к бесконечности и мы получим 3-мерную геометрию с бесконечным числом внутренних степеней свободы. Точки в этом пространстве (т. е. очень малые области) являются бесконечномерными. Применим ли к такому пространству физический анализ П. Эренфеста [3]. Нетрудно заметить, что в его анализе существенную роль играло понятие силовой линии, которая предполагалась 1-мерной. Однако, как мы видели выше, «линия» в 3-мерном пространстве внутренне может быть и n -мерной. Поэтому анализ Эренфеста, по-видимому, справедлив для внешней 3-мерной геометрии, но не для внутреннего пространства таких «линий» (силовых?).

Мы приходим к выводу, что если наблюдатели пользуются формализмом 3-мерной геометрии, то само пространство может быть не 3-мерным. Скорее всего, как это следует из вышеизложенного, оно потенциально (внутренне) бесконечномерно. На каком уровне проявляется эта многомерность — это уже вопрос физики. Здесь напрашивается аналогия с потенциалом в теории калибровочных полей. Ведь сам потенциал ненаблюдаем. Наблюдаемой является разность потенциалов. Возможно, в нашем случае, аналогом разности потенциалов является пересечение подпространств. Пока же мы видим, что внешняя трехмерность сохраняется в большом интервале масштабов. Объяснение этому дано в [4].

Л и т е р а т у р а :

1. Демин В. Н. Основной принцип материализма. — М., Политиздат, 1983.
2. Архангельский А. В. Конечномерные векторные пространства. — М., Изд-во Московского ун-та, 1982.
3. Горелик Г. Е. Размерность пространства. — М., Изд-во Московского ун-та, 1983.
4. Klimetz A. P. Geons — candidates for the role of the initial microblack holes and their importance for the Planck physics, FIZIKA B (Zagreb) 9 (2000) 1, 23-42. http://fizika.hfd.hr/fizika_b/bv00/b9p023.htm

Klimetz A. P.

On the space dimensions

On the base of the certain philosophical approach it is discussed the space dimentionions notion and thus the generalized dimensions notion is introduced. It is shown that the observed 3-dimensions space can be many-

dimensions and even infinitely-dimensions one.

Keywords: geometry, space dimensions, 3-dimensions space.