

Жук Н. А.

О ТОЖДЕСТВЕ ДВУХ ВИДОВ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА (методологические заметки)

*АО «Научно-технологический институт транскрипции, трансляции и репликации»,
г. Харьков, Украина, zhuck@ttr.com.ua*

Обсуждается вопрос о тождестве двух видов уравнений общей теории относительности, отличающихся на слагаемое с космологической постоянной. Показано, что этот параметр на самом деле не является константой, а правые части разных видов уравнений Эйнштейна имеют разное содержание и потому допускают отождествление уравнений друг с другом. Ясное толкование правых частей указанных уравнений получено только путем разделения материальных источников гравитации на исследуемое тело и все остальные материальные объекты Вселенной и учета влияния этих объектов на гравитационное поле исследуемого тела.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, гравитационное поле.

Введение

Общая теория относительности 1915 года допускает обобщение уравнений путем добавления к ним дополнительного слагаемого с так называемой космологической постоянной, что и было осуществлено Эйнштейном в 1917 г.

Такие действия Эйнштейн предпринял для того, чтобы построить модель статической Вселенной. Действительно, добавление в уравнения Эйнштейна слагаемого с космологической постоянной эквивалентно введению в реальный мир неких сил отталкивания (как считают), которые при определенной средней плотности Вселенной точно компенсируют силы притяжения. Назовем эту плотность критической.

Более поздние исследования показали, что если в данную модель ввести небольшое возмущение, такое, чтобы средняя плотность стала немного меньше критической, то Вселенная начнет расширяться, плотность упадет еще больше, и расширение еще больше ускорится. Если же в модель ввести возмущение, такое, чтобы средняя плотность стала больше критической, то Вселенная начнет сжиматься все больше и больше.

Более того, статическая модель мира Эйнштейна подвержена неустойчивости более общего типа, чем указанная выше. Так, если бы в начальной статической модели перенесли часть вещества из одной области в другую, то более плотная область стала бы сжиматься, а менее плотная – расширяться и Вселенная постепенно стала бы очень неоднородной, что в корне отличается от наблюдаемой ныне в глобальных масштабах картины мира.

Следует подчеркнуть, что в модели Эйнштейна подразумевается неизменность космологической постоянной, т. е. в этой модели космологическая постоянная – это некое число, которое ни при каких условиях не меняется. И только в этом случае Вселенная должна быть неустойчивой. Это подчеркивается здесь потому, что в новой стационарно-статической модели Вселенной [1] данный параметр зависит от средней плотности Вселенной, а потому и возможно динамическое равновесие Вселенной.

В 1922 и 1924 гг. русский геофизик и математик Фридман опубликовал в берлинском физическом журнале две статьи, в которых приводились нестационарные решения уравнений Эйнштейна, а также различные их модификации. Более того, практически и все последующие космологические модели являются частными случаями этих решений, т.е. можно указать некоторые динамические уравнения, найденные Фридманом и общие для всех динамических моделей Вселенной.

С открытием в 1929 г. красного смещения в спектрах излучения других галактик и трактовкой его как расширения Вселенной отпала необходимость в космологической постоянной, и в 1931 г. Эйнштейн отказался от нее, сделав совместное заявление с де Ситтером, и больше никогда не использовал эту величину.

После открытия микроволнового фонового излучения космоса в 1965 г. в официальной науке идея Большого Взрыва и концепция расширяющейся Вселенной победили, казалось бы,

окончательно и бесповоротно. Однако затруднения стандартного сценария, идеи замены эйнштейновской пустоты космоса материальным эфиром снова и снова выдвигали на повестку дня вопросы о необходимости включения в уравнения Эйнштейна космологической постоянной и о ее природе.

В монографии [1] данный вопрос решен положительно и конкретно, что дало плодотворные результаты в решении основных космологических проблем, в частности в деле доказательства тождества инертной и гравитационной масс. Однако с методологической точки зрения назревал вопрос о тождественности обоих видов уравнений Эйнштейна и простой неправильности трактовки правых частей этих уравнений. Иными словами, между этими двумя видами уравнений вообще не должно быть никакой разницы: одни уравнения должны перетекать в другие при правильном понимании тензора энергии-импульса материи.

Следует подчеркнуть, что где-то подсознательно уже и Эйнштейн чувствовал корень проблемы, когда говорил о том, что в его уравнениях есть стройная и красивая левая часть, отражающая геометрию пространства-времени, и гнилая правая часть, в которой должна была находиться непонятно какая и непонятно каким образом подключенная материя. Иными словами, он подразумевал, что если в левой части своих уравнений была однозначность и ясность, то в правой части была явная неоднозначность и неясность содержания.

На сегодняшний день, по мнению автора, появилось ясное толкование и правой части уравнений Эйнштейна на основе разделения материальных источников взаимодействующих тел (или частей одного тела) и всех остальных материальных источников Вселенной.

1. Выбор уравнений Эйнштейна в космологии

Как уже неоднократно упоминалось выше, существует две разновидности уравнений Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\kappa T_{ik}, \quad (1)$$

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik}, \quad (2)$$

где λ - космологическая постоянная; R_{ik} - тензор Риччи, свертка тензора кривизны Римана-Кристоффеля R^l_{ijk} ; T_{ik} - тензор энергии-импульса материи; g_{ik} - метрический тензор четырехмерного пространства-времени; R - скаляр кривизны, свертка тензора Риччи; $\kappa = 8\pi G/c^4$ - постоянная Эйнштейна; G - постоянная тяготения Ньютона; c - скорость света; $i, j, k, l = 0, 1, 2, 3$.

В работе [1] из совокупности всех характеристик Вселенной выбрана такая, которая позволила сделать однозначным выбор уравнений Эйнштейна. Такой характеристикой стала глобальная евклидовость Вселенной. Так как для этого случая $g_{ik} = \text{const}$, а $g_{ik,l} = 0$, то в силу существующих математических соотношений эта характеристика выражается равенством

$$R^l_{ijk} = R_{ik} = R = 0. \quad (3)$$

Используя выбранный критерий, проанализируем уравнения (1) и (2). Для начала образуем из них свертки:

$$R = \kappa T, \quad (4)$$

$$R + 4\lambda = \kappa T. \quad (5)$$

Для реальной Вселенной, заполненной материей, инвариант энергии-импульса $T \neq 0$. Ввиду того, что κ также не равно нулю, то с учетом (3) становится очевидным факт невыполнения равенства (4). Следовательно, несправедливы и уравнения (1), из которых получено это равенство. Напротив, равенство (5) соблюдается при $\lambda \neq 0$, что, в свою очередь, указывает на применимость уравнений (2) для описания реальной Вселенной.

Следует отметить, что приведенный вывод следует непосредственно и из уравнений (1) и (2). Но в данном случае из равенства (5) при условии (3) следует также и выражение для космологической постоянной

$$\lambda = \frac{1}{4} \kappa T, \quad (6)$$

которая играет фундаментальную роль в объяснении глобальных свойств Вселенной.

2. Аргументы противников космологической постоянной

Основным отличием эйнштейновского варианта общей теории относительности является пустота пространства-времени и каким-то образом его искривленность вблизи массивных тел. И если рассматривается изолированная масса, то ставится вопрос о граничных условиях, т.е. условиях на бесконечности.

Традиционно считается, что при отсутствии материи пространство-время должно быть евклидовым. Поэтому на бесконечности, где гравитационное поле рассматриваемого материального тела равно нулю, тензор энергии-импульса также обращают в нуль [2]. Иными словами, равенства

$$T_{ik} = 0, \quad R_{ik} = 0 \quad (7)$$

в этом случае считаются совместимыми. А это, в свою очередь, может быть только тогда, когда уравнения Эйнштейна не содержат космологическую постоянную, т.е. когда $\lambda = 0$.

Подобные рассуждения не вяжутся с неустранимой материальностью Вселенной, однако, принимались физиками как нечто классическое, изначально присущее уравнениям Эйнштейна (но никак не природе!).

В работе [3] авторы пошли еще дальше и объявили, что пустое пространство-время не обязательно должно быть плоским, что для евклидова пространства необходимо более сильное условие $R_{ijk}^l = 0$. Иными словами, что условия (7) несовместимы. Однако тут же придумали другую причину для того, чтобы избавиться от космологической постоянной. Авторы посчитали, что космологическая постоянная приводит в отсутствие материи к возникновению принципиально неустранимой кривизны пространства-времени, не связанной с материей. Таким образом они подкрепили свой предыдущий вывод.

И они были бы правы, если бы космологическая постоянная была действительно постоянной величиной, но исследования, выполненные в работе [1], показали, что это не так. Как оказалось, так называемая космологическая постоянная даже в простейшем случае для пылевой материи определяется по формуле

$$\lambda = \frac{2\rho G c_0}{c^2} \quad (8)$$

и зависит от средней плотности Вселенной c_0 и скорости распространения света c , которые в различных объектах и условиях могут изменяться в широких пределах.

3. Устранение различий между уравнениями Эйнштейна

Основное свойство левой и правой части уравнений Эйнштейна заключается в том, что их дивергенция равна нулю, т.е. что они содержат законы сохранения. И это свойство не нарушается, используем ли мы уравнения (1) или (2).

К сожалению, это свойство рассматривали только как математическую особенность, вытекающую из тензорного исчисления и инвариантности тензорных величин. Однако эквивалентность указанных уравнений по этому свойству с точки зрения физики может иметь и более глубокое значение. Это, во-первых.

А во-вторых, тензор энергии-импульса материи имеет свои особенности и не определяется однозначно даже при достаточно общих условиях. Так, если принять локальные условия (зависимость от компонент поля или иных функций состояния, но не от координат; равенство нулю дивергенции), то из этих условий он определяется только с точностью до двух постоянных [2]. Иными словами, если тензор T_{ik} удовлетворяет вышеуказанным условиям, то им удовлетворяет и тензор

$$T'_{ik} = \epsilon T_{ik} + \nu g_{ik}, \quad (9)$$

где постоянная β зависит от выбора системы единиц, а постоянная ν зависит, кроме того, и от условий на бесконечности.

Чисто математически замена в уравнениях (1) тензора T_{ik} на тензор T'_{ik} означает переход к уравнениям типа уравнений (2). Однако нас интересует и физическая сущность такого перехода. И она находится.

Действительно, исходя из представления о том, что в мире не бывает закрытых систем, правую часть уравнений (1) необходимо представить в виде суммы тензора энергии-импульса T_{ik}^m исследуемого материального тела и тензора энергии-импульса T_{ik}^U всех остальных материальных тел Вселенной, которые также влияют на исследуемый процесс:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\kappa (T_{ik}^m + T_{ik}^U). \quad (10)$$

Однако с учетом (9) правую часть уравнений (1) необходимо представить в виде суммы, как показано ниже:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\kappa (\beta T_{ik} + \nu g_{ik}). \quad (11)$$

А теперь нужно провести сопоставление компонентов в правых частях уравнений (10) и (11). Очевидно, что тензор энергии-импульса T_{ik}^m материального тела мы ничем не ограничивали, т.е. он является произвольной величиной. Тензор βT_{ik} мы также ничем не ограничивали, и его также следует считать произвольным. Однако второй тензор в (11), т.е. νg_{ik} не является произвольным, поскольку определяется метрическим тензором g_{ik} и, таким образом, зависит от структуры пространства-времени. Следовательно, тензор T_{ik}^m однозначно сопоставляется с тензором βT_{ik} в виде равенства

$$T_{ik}^m = \beta T_{ik}, \quad (12)$$

но никак не с тензором νg_{ik} .

С другой стороны, очевидно, что тензор энергии-импульса T_{ik}^U всех материальных тел Вселенной никак не может быть сопоставлен с произвольным тензором βT_{ik} , так как зависит от всех материальных источников, т.е. от общей структуры пространства-времени Вселенной. Следовательно, он может быть сопоставлен только с тензором νg_{ik} :

$$T_{ik}^U = \nu g_{ik}. \quad (13)$$

Таким образом, установлено однозначное соответствие компонентов в правых частях уравнений (10) и (11). После перестановки в (11) νg_{ik} в левую сторону

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \kappa \nu g_{ik} = -\kappa \beta T_{ik} \quad (14)$$

и с учетом (12) имеем

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \kappa \nu g_{ik} = -\kappa T_{ik}^m. \quad (15)$$

Полученное выражение (15) сходно с уравнениями (2), а после подстановки равенства

$$\nu = -\frac{1}{4} T, \quad (16)$$

где T - скаляр энергии-импульса материи плоской Вселенной, получаем уравнения

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \frac{1}{4} T g_{ik} = -\kappa T_{ik}^m, \quad (17)$$

которые тождественны уравнениям (2). Однако в отличие от последних уравнения (17) более точно отражают физическое содержание левой и правой своих частей.

Действительно, теперь в правой части находится тензор материального объекта, свертка которого в случае твердого тела равна

$$T^m = c_m c^2, \quad (18)$$

где c_m - плотность этого тела.

Левая же часть уравнений (17) содержит космологическую постоянную Λ , которая пропорциональна свертке тензора энергии-импульса Вселенной. В случае пылевидного состояния материи Вселенной эта свертка равна

$$T = c_0 c^2. \quad (19)$$

Таким образом, уравнения (1) и (2) отличаются друг от друга не только на слагаемое с космологической постоянной Λ , но и содержанием правых частей. А именно: правая часть уравнений (1) содержит совокупный тензор энергии-импульса данного материального тела и всех остальных тел Вселенной. Этот тензор обозначим T_{ik}^y , чтобы в дальнейшем не путаться в обозначениях:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\kappa T_{ik}^y. \quad (20)$$

Только теперь становится очевидным, что уравнения (20) и (17) (а вместе с ними и их прототипы (1) и (2)) тождественны друг другу. Между тем, по виду уравнений (1) и (2) этого не скажешь, поскольку правые части у них обозначались одинаково, что, естественно, предполагало одинаковость и содержания этих частей.

Заключение

Данная статья не содержит каких-либо новых практических результатов, пригодных для использования в теории относительности, космологии или астрофизике. Тем не менее, здесь дано разъяснение содержания той части уравнений Эйнштейна, которую сам автор этих уравнений называл гнилой. Как оказалось (и как давно уже подразумевал автор данной статьи), правые части двух видов уравнений Эйнштейна имеют разное содержание, а потому допускают отождествление уравнений друг с другом. Такое отождествление невозможно было провести на математическом уровне, поскольку предполагалось равенство правых частей и различие левых частей на космологическую постоянную. Только раскрытие физического содержания правых частей уравнений Эйнштейна, а также космологической постоянной позволило поставить все на свои места и показать, что никаких принципиальных различий между двумя видами уравнений нет.

С другой стороны, имеется ряд задач (или условий их решения), для которых тензором T_{ik}^U действительно можно пренебречь. Однако при этом также можно пренебречь и космологической постоянной, поскольку они друг с другом связаны. Таким образом, упрощение правой части уравнений (1) за счет исключения тензора T_{ik}^U эквивалентно упрощению левой части уравнений (2) за счет исключения космологической постоянной Λ . И наоборот, всякое пренебрежение космологической постоянной в уравнениях (2) эквивалентно исключению из уравнений (1) тензора энергии-импульса материальных источников Вселенной. Оправданность этого шага определяется соотношением масштабов решаемых задач и радиуса гравитационных взаимодействий, который, в свою очередь, зависит от величины космологической постоянной, т.е. от плотности рассматриваемой материи.

Л и т е р а т у р а :

1. Жук Н. А. Космология. – Харьков: ООО «Модель Вселенной», 2000. — 464 с.
2. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. – Москва: Физматгиз, 1961. — 564 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – Москва: Наука, 1988. — 512 с.

Zhuck N. A.

On the identity of the two Einstein equations type

The problem on identity of two types of the General Relativity equations differed by addend with the cosmological constant is considered. It is shown that this parameter actually is not a constant and the right members of different types of the Einstein equations have the different contents and thus they permit the identification of the equations with each other. The clear explanation of right members of the indicated equations is obtained only by the separation of the explored body from the all remaining material objects of the Universe and taking into account the influence of these objects on the gravitational field of explored body.

Keywords: Einstein equations, gravitation field.