Гравитация и космология

УДК 513.83:530.1; 517.983.28

Проняев В.В.

К ВОПРОСАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ СОСТОЯНИЯ СУБСТАНЦИИ, ПРЕДШЕСТВУЮЩЕЙ «БОЛЬШОМУ ВЗРЫВУ»

e-mail: orion22@box.vsi.ru

На основе двух областей математики: топологических исследований особенностей Ландау и канонической теории возмущений строится модельное утверждение для дальнейшего исследования вопросов, касающихся концепции Большого Взрыва. Предложено математическое описание состояния, предшествующего Большому Взрыву. Сформулированы задачи для дальнейших исследований.

Ключевые слова: Большой Взрыв, многообразия Ландау, страты, пинч, гамильтониан, время устойчивости, шар, сфера, радиус удержания, мнимое время.

I

Почему и как возникла Вселенная, пожалуй, самый актуальный вопрос современности. В настоящее время официальной теорией на этот счёт является концепция «Большого Взрыва». Согласно ей наша Вселенная образовалась в результате «Большого Взрыва» примерно 15–18 млрд. лет тому назад. Но не менее, а может даже более интересным является вопрос: а что же было до этого?

Современная теория — это определённая сумма по всем историям, которые, интерферируя друг с другом, создают нашу реальную Вселенную (наиболее вероятную). Как известно, в официальной концепции отказываются от обычного времени. Для описания возможных историй вселенных приходится переходить от реального времени к мнимому, осуществляя при этом переход от пространства Минковского к четырёхмерному пространству Евклида. А в этом пространстве исчезают особые точки. У поверхности сферы, как у любой другой замкнутой поверхности, «границ нет». Кавычки здесь поставлены потому, что это и есть новое граничное условие. В мнимом времени нет ни сингулярностей, ни границ. По возвращении же в реальное время, в котором мы живём, обнаруживается, что сингулярности появляются опять. Интересующегося читателя здесь можно отослать к известной книге Стивена Хокинга [1], который замечает, что не имеет смысла спрашивать, что же реально: действительное время или время мнимое? Важно лишь, какое из них более подходит для описания. При этом надо ещё подумать, как например совершить переход от мнимого времени к реальному, т. е. к действительному.

В данной работе нам предстоит ответить, пожалуй, на самый интересный вопрос: «А что же была за субстанция до Большого Взрыва»? То есть найти «путь» назад в бесконечность, и что повлияло на «просачивание» этого «Взрыва» (с образованием нашей Вселенной). Здесь на слабом или сильном антропных принципах мы заострять внимание читателя не будем — они не понадобятся.

Некоторые авторы считают, что в эту субстанцию нечего «заглядывать». Почему же «не заглянуть», если она поддается конкретному математическому описанию? Тем более, что содержание не будет выходить за рамки официальной концепции.

II

Мы представим те области математики, на основе которых и будем реализовывать вышеуказанную цель (задачу). Первая область — это топологическое исследование особенностей Ландау [2] в контексте ветвлений вокруг многообразий Ландау. Имеем $\pi: Y^P \to T^q$ — аналитическое собственное отображение комплексных аналитических многообразий, комплексные размерности которых соответственно равны p и q.

Предположим, что многообразие Y аналитически стратифицировано, т. е определяющие его стратификацию замкнутые вложения множества $Y = S^{p_0} \supset S^{p_1} \supset S^{p_2} \supset \ldots$ являются комплексными аналитическими множествами. Замыкание страта A в этом случае — комплексное аналитическое множество S_A — неприводимая компонента одного из S^{p_i}. Также имеем $\{s_1(y), s_2(y),\ldots,s_r(y)\}$ — набор аналитических функций, локально порождающих идеал множества S_A, и $t_1(y)$, $t_2(y),\ldots,t_g(y)$ — аналитические функции, локально определяющие проекцию $\pi : Y^P \to T^q$.

Из [2] имеем $\sum_A \bigcap A = cA$, где $\sum_A \subset S_A$, $\sum_A$ — также комплексное аналитическое подмножество.

Заметим, что $\sum_A \bigcap \bar{A} = c\bar{A}$ или $cA = \sum_A - \sum_A \bigcap \partial A$, так что cA — комплексное аналитическое множество является связной компонентой $\sum_A$, а видимый контур (в образе) $\pi(c\bar{A})$ также является комплексным аналитическим множеством. Многообразие Ландау $LA = \pi(c\bar{A})$ есть видимый контур страта A.

Также весьма важно здесь то, что при рассмотрении многообразий Ландау примыкающих стратов обнаруживаем точку $u \in LA \bigcap LB$, которая является точкой истинного (или эффектного) пересечения многообразий Ландау LA и LB, если она является проекцией точки $a \in c\bar{A} \bigcap c\bar{B}$.

При этом, если рассмотреть сферу, то будем иметь точку истинного пересечения, где многообразия Ландау двух примыкающих стратов касаются друг друга, а именно на окружности большого круга этой сферы. Все это понадобится в дальнейших рассуждениях.

Далее, если положить $x_1 = y_2, x_2 = y_3, \ldots, x_n = y_{n+1}$, то случай, когда $m=n+1$

$$s_1(x,t) \equiv t_1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0,$$
$$s_2(x,t) \equiv x_1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$s_{n+1}(x,t) \equiv x_n = 0$$

будет называться линейным пинчем. Есть еще простой (квадратный) пинч, когда $m \leq n$. Может возникнуть ситуация, когда при $t_1 \to 0$ окружность (соответственно сфера) S_l, исчезает, превращаясь в две изотропные прямые (соответственно изотропный конус).

Также в [2] дано описание исчезающих цепей. Все эти цепи исчезают при $t_1 \to 0$. К ним относится, как указывалось выше, сфера. Опишем её вкратце. Многообразие $U \bigcap S_1 \bigcap \ldots \bigcap S_m$ — это (n-m)-мерная комплексная сфера; при этом (n-m)-мерная «действительная» сфера является её деформационным ретрактом, а её группа гомологий $H_{n-m}(U \bigcap S_1 \bigcap \ldots \bigcap S_m)$ — бесконечная циклическая группа, порождённая классом этой сферы. Ранее описывалась модель — истинное пересечение двух многообразий Ландау. Для двух примыкающих стратов

$$A = S_1 \bigcap S_2 \bigcap \ldots \bigcap S_m \bigcap S_{m+1} - \bigcup_{j>m+1} S_j, \quad (1)$$

$$B = S_1 \bigcap S_2 \bigcap \ldots \bigcap S_m - \bigcup_{j>m} S_j, \quad (2)$$

Предполагаем, что всё происходит в открытом множестве $V \subset Y$ с координатами $(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_g)$. При этом

$$s_1(x,t) \equiv t_1 - [x_1 + x_2 +, \ldots, x_{m-1} + (x_m - t_2)^2 + x_{m+1}^2 + \ldots + x_n^2], \quad (3)$$
$$s_2(x,t) \equiv x_1, \quad (4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_m(x,t) \equiv x_{m-1}, \quad (5)$$
$$s_{m+1}(x,t) \equiv x_m, \quad (6)$$

В нашем же случае для вышеприведённой модели имеем: m=1, n=2,

$$s_1 \equiv t_1 - [(x_1 - t_2)^2 + x_2^2], \quad (7)$$

где $\sqrt{t_1}$ — радиус сферы,

$$s_2 \equiv x_2. \quad (8)$$

При этом критические множества задаются уравнениями:

$$c\overline{A} = \{(x,t): x_1 = x_2 = ... = x_n = 0, t_1 - t_2^2 = 0\} \quad (9)$$

$$c\overline{B} = \{(x,t): \text{все } x_i\text{=0, кроме } x_m,\ x_m\text{=}t_2,\ t_1\text{=0} \quad (10)$$

и многообразиями Ландау будут

$$LA: t_1 - t_2^2 = 0 \quad (11)$$

и

$$LB: t_1 = 0\,. \quad (12)$$

Все эти известные положения из данной области математики, приведённые здесь чтобы ввести читателя в курс дела, понадобятся нам в дальнейшем. А теперь обратимся к другой весьма интересной области математики — к канонической теории возмущений, где за основу берутся основные положения, восходящие к результатам Н.Н. Нехорошева и В.И. Арнольда. Напомним, что в теории канонических возмущений (см. статью П. Лошака [3]), за основу берётся система, определяемая гамильтонианом $H(p,q) = h(p) + \varepsilon f(p,q), (p,q) \in \mathbb{R}^n T^n, T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Здесь ($p$, q) — переменное действие, угол интегрируемого гамильтониана, ε — малый параметр; $h(p)$ — уровень энергии; остальные обозначения общеизвестны. При этом выполняется следующая основная оценка:

$$\|p(t) - p(0)\| \le R(\varepsilon)\text{, при } \left|t^*\right| \le \tau(\varepsilon) \text{ и } |\varepsilon| \le \varepsilon_0\,, \quad (13)$$

где $R(\varepsilon)$ — радиус удержания, $\tau(\varepsilon)$ — время устойчивости, $\varepsilon_0>0$ — порог применимости.

В этой статье резонансы рассматриваются не как препятствие, а как подспорье (рассматриваются резонансные поверхности, замкнутые орбиты, относящиеся к невозмущенной системе). Далее предполагается, что h и f определены и аналитичны в некоторой окрестности начала координат, а именно в комплексной области $D = D(R,q,\tau), (p>0, \tau>0)$ заданной следующим образом. Пусть B_R — вещественный шар радиуса R с центром в нуле, тогда $D = D(R,q,\tau) = \left\{p, q \in \mathbb{C}^{2n}, dist(p, B_R) \le \rho, \left|\operatorname{Im} g\right| \le \sigma\right\}$.

Необходимо отметить параметр r, представляющий радиус зоны «влияния» вышеупомянутого тора, который в [3] присутствует во многих выкладках. Для получения информации об устойчивости точек в фазовом пространстве для любой начальной точки $(p(0), q(0))$ необходимо рассмотреть траекторию $(p(t^*), q(t^*))$, начинающуюся в $(p(0), q(0))$ и допускающую конкретную оценку, восходящую к (13). Также в [3] описывается эвристическая картина диффузии Арнольда, где за основу берется шар $B(p(0), \sqrt{\varepsilon})$ радиуса $\sqrt{\varepsilon}$ и центром $p(0)(r_0 = 1)$, где и ищется рациональная точка p с минимальным периодом T лежащая внутри этого шара. В [3] отмечается, что при этом упускается существование колмогоровских торов, маломерных инвариантных торов и т. д. Кстати В.И. Арнольд говорит о «топологической неустойчивости» в контексте вышеупомянутой эвристической картины, т. е «диффузия» уже последующий термин, и здесь также указывается о механизме «расстройки» Нехорошева, т. е «дрейфе» в нерезонансную область.

В вышеупомянутом шаре $B(p(0), \sqrt{\varepsilon})$ радиуса $\sqrt{\varepsilon}$ с минимальным периодом T точка $p(t^*)$ может «стохастически» колебаться со скоростью порядка $\sqrt{\varepsilon}$ внутри шара, но уже с радиусом $10\sqrt{\varepsilon}$ с центром в p вплоть до момента времени

$$t_1^* = \tau_0 \exp\left(\tau / T\sqrt{\varepsilon}\right)\,. \quad (14)$$

Там же в [3] отмечалось, что эта модель имеет ряд недостатков, но они в принципе к нам не относятся. Возвращаясь к выражению времени (14), нас больше устроит тот случай в [3], где

$$\left|t_1^*\right| \le \tau_0 \exp(\tau / T\sqrt{\varepsilon})\,. \quad (15)$$

Здесь τ_0, r — некоторые константы, значения которых несущественны.

Вот собственно и все основные положения вышеупомянутых областей математики, которые нам понадобятся в дальнейшем.

III

Теперь возвратимся к цели данной работы — моделированию состояния той субстанции, которая предшествовала «Взрыву», т. е. состоянию более 15–18 млрд. лет тому назад. Не будем касаться вопроса, существует ли лишь одна наша Вселенная или их бесконечное множество. При этом необходимо рассматривать мнимое время, т. е. временем, измеряемым в мнимых единицах.

Предложение (или модельное утверждение для дальнейших исследований): **состояние субстанции до «Большого Взрыва», уходящее «вглубь» в бесконечность, следует изучать и моделировать, например с помощью топологических исследований особенностей Ландау во взаимосвязи с канонической теорией возмущений, восходящей к результатам Н.Н. Нехорошева и В.И. Арнольда.**

Набросок доказательства

Дальнейшее изложения будет несколько напоминать [3]. Ранее упоминалась «диффузия» Арнольда, из-за которой модель имеет «достоинства» и «дефекты». Нам предстоит «подвести» наши рассуждения к тому состоянию, чтобы показать на основе чего «просочилась» (термин Я.Б. Зельдовича) наша Вселенная.

Исходя из факта, что Вселенная образовалась в результате «Большого Взрыва», заключаем, что всё-таки субстанцию (до «Взрыва») к этому что то подвигло. Например — флуктуации. Мы можем рассмотреть ранее описанную комплексную сферу, где комплексные аналитические множества будут играть роль флуктуаций. Чтобы придать процессу «динамику» (ведь необходимо охватить субстанцию из бесконечности и «довести» её до начала «Большого Взрыва») допустим, что наша сфера не так «статична». А она то появляется, то исчезает, то снова появляется и опять исчезает. И так всё время. Вообще имеем, что из «глубины» бесконечности сфера, или сферы, которых может быть в принципе бесконечное множество, причём разных, то появлялись, то снова исчезали и т. д. Получается «пульсирующая» субстанция. Вот здесь и прослеживается некая «генетическая» связь с «пульсирующей» Вселенной.

Всё это очевидно согласуется с ранее описанными известными положениями об исчезающей сфере из ветвлений вокруг многообразий Ландау. Сфера, которая появляется в результате флуктуаций, исчезает из условий описанных ранее для простых пинчей, снова появляется и т. д.

А теперь подойдём к рассмотрению ситуации перед «Большим Взрывом». Понятно, что здесь надо рассмотреть модель истинного пересечения двух многообразий Ландау с выражениями с (1) по (12).

Заметим, что в ранее приведённом примере указывалось на точку $u \in LA \bigcap LB$ истинного пересечения многообразий Ландау двух примыкающих стратов. При этом эти многообразия касаются друг друга именно на сфере по окружности большого круга, что нам собственно и нужно. Эта точка и будет являться прообразом той сингулярной точки, которая и «привела» к «Взрыву». А теперь зададимся вопросом: в чем причина, что одна какая-то сфера (если сфер много) как бы чуть «задержалась» и соответственно «образовалась» эта точка u?

И здесь на помощь приходит каноническая теория возмущений. Действительно нам необходимо обратиться к радиусу удержания, или к выражению (15), где радиус шара $\sqrt{\varepsilon}$ (или $10\sqrt{\varepsilon}$, что здесь не существенно) можно сравнить с $\sqrt{t_1}$ — радиусом сферы из модели пересечений двух многообразий Ландау, т. е. $\sqrt{\varepsilon} \equiv \sqrt{t_1}$. Заметим существенную деталь: в выражении (15) радиус $\sqrt{\varepsilon}$ связан со временем $\left|t_1^*\right|$. Получается, что до этого «вглубь» на бесконечность выражение (15) не выполнялось. И в итоге бесконечного числа этих историй, берущих своё начало именно из «глубины» бесконечности и произошёл некий «резонанс». А именно — «просочилась» (вместе с временной составляющей) «ситуация» в контексте равенства правой и левой частей выражения (15). И далее, также, одновременно с (15) «просочилась» вышеуказанная точка $u \in LA \bigcap LB$ (прообраз сингулярной точки последующего «Взрыва»).

В связи с этим возникают вопросы к вышеизложенной модели:

1. Как всё-таки связать мнимое время с приведённой здесь моделью комплексных объектов? И корректно ли время $\left|t_1^*\right|$ из (15) увязывать с мнимым временем? И как от времени из (15) «прийти» (математически реализовать) к мнимому времени?
2. Как перейти от точки *u* к сингулярной точке «Большого Взрыва»?

   Здесь интересующемуся читателю можно порекомендовать в помощь известную теорему «об острие клина» Н. Н. Боголюбова [4] (её версию с открытым шаром для клиньев с «нелинейным остриём»), а также геометрию на сфере мнимого радиуса, т. е. геометрию Лобачевского, связав эти области математики с аналитичностью интеграла на многообразиях Ландау (см. там же — в [2]).
3. Можно ли приведённую здесь модель использовать например для моделирования процессов в альтернативной «Большому Взрыву» концепции — «Нулевой Вселенной» У. Кэрри?

Литература:

1. *Хокинг С. У.* Краткая история времени. — СПб.: Амфора, 2005. — 196 с.
2. *Фам Ф. Н.* Введение в топологическое исследование особенностей Ландау / Пер. с фр.; под ред. В. И. Арнольда. — М.: Мир, 1970. — 146 с.
3. *Лошак П. А.* Каноническая теория возмущений // Успехи математических наук. — 1992. — Т. 47. — №.6 (288). — С. 59-121.
4. *Владимиров В. С. и др.* Теорема об «острие клина» Боголюбова, её развитие и применение. // Успехи математических наук. — 1994. — Т. 49. — №5 (299). — С. 47-58.

Статья поступила в редакцию 15.06.2015 г.

Pronyaev V.V.

To questions of mathematical realization of the condition of the substance previous «big bang»

On the base of two areas of mathematics: typological studies of Landau singularities and the canonical perturbation theory it is constructed a model statement for further study of questions related to the concept of the Big Bang. The mathematical description of the state prior to the Big Bang is proposed. The problems for further research are formulated.

Key words: Big Bang, Landau varieties, striations, pinch, Hamiltonian, stability time, a sphere, sphere, deduction radius, imaginary time.